

# Descripción Cualitativa del Mapeo Computacional Bajo el Concepto de Conjunto

*M. en C. Gustavo A. Mas Levario, M. en C. María A. Segura Corona y M. en C. Pablo Manrique Ramírez*  
Investigadores del CIC-IPN  
gmas@redipn.ipn.mx

**E**l propósito central de este artículo es demostrar el denominado *Teorema del Mapeo Computacional*, bajo la perspectiva de la ingeniería de cómputo. Este se define como sigue:

**Teorema:** La cantidad de direcciones absolutas del mapa de memoria de un procesador que son mapeadas es inequívocamente siempre más pequeña que la cantidad de direcciones absolutas a mapear.

Para lograr lo anterior se propone una descripción asociativa entre los números algebraicos y los números trascendentes, y su significado en el direccionamiento de memoria en un mapeador.

---

## INTRODUCCIÓN

---

El campo de las matemáticas aplicadas ha seguido una tendencia en donde se establece un vínculo entre los entes abstractos y los fenómenos reales, el cual permite a los pragmáticos intuir problemas y soluciones específicos de la ingeniería de cómputo. La teoría general de Cantor sobre conjuntos permite concebir cómo descubrir e identificar que son

los números algebraicos y que son los números trascendentes en el direccionamiento de memoria/puertos en un mapeador.

Para conceptualizar el mapeo se emplea el concepto del término *map* del Inglés, cuya traducción libre en este caso es mapear. La palabra mapear sería un verbo del tipo transitivo cuyo significado es el denotativo de unir; se usa en dos puntos de vista para crear dos significados connotativos. Desde el punto de vista del software, mapear tiene la siguiente definición: Transferir un conjunto de objetos de un lugar a otro, en una relación posicional. Desde el hardware, tiene la siguiente definición: Relacionar una dirección o un conjunto de direcciones a través del direccionamiento del mapa de memoria de un procesador a una dirección o a un conjunto de direcciones de un dispositivo receptor. Así se da origen a un par de adjetivos: mapeado o mapeada; y también a dos sustantivos: mapeador y mapeo.

En vista de lo anterior, se adjetivó a los sustantivos memoria y dirección para crear los términos compuestos memoria mapeada y dirección mapeada. Una memoria mapeada es una unidad de direccionamiento lógico usada por dos o más entidades computacionales, de tal modo que a través de un objeto lógico sólo una unidad computacional pueda usarla en un determinado momento. Una dirección mapeada es la dirección

absoluta de una memoria mapeada, que ha sido relacionada con una dirección absoluta de un procesador.

El término mapeador se refiere al objeto lógico que tiene la función de relacionar la memoria mapeada con un procesador. El mapeador también está localizado entre el procesador y la memoria mapeada. La circunstancia que se origina en esta correspondencia cuando el mapeador está actuando sobre la memoria mapeada es lo que se llama mapeo. Intrínsecamente la técnica del mapeo es una actividad de direccionamiento sin colisiones.

La idea básica es llevar la relación entre las direcciones absolutas y las direcciones mapeadas a una analogía con un segmento de recta, definido en el plano cartesiano. Posteriormente se establecerá una condición que permitirá ver el mapeo como un fenómeno variable, que crece de tal modo que es necesario introducir el valor en el límite en cada una de las comparaciones que se dan entre las direcciones mapeadas y las direcciones absolutas. Una vez obtenido este valor límite a través del coeficiente diferencial, se planteará una ecuación diferencial cuya solución es una ecuación lineal cartesiana, en donde se procederá a encontrar las raíces y a identificar las no raíces desde el punto de vista del direccionamiento de memoria en el mapeador.

MÉTODOS

Para construir la analogía se usará un lugar geométrico en donde se supone no habrá números negativos, números imaginarios ni cambios en la pendiente de la línea. Se partirá de una serie de postulados básicos que permitirán gradualmente obtener las definiciones necesarias para establecer la ecuación algebraica del mapeo. Estos postulados son esencialmente una serie de asociaciones heurísticas entre los entes matemáticos y los conceptos computacionales del fenómeno del direccionamiento de un procesador con su memoria.

Para establecer las asociaciones heurísticas se parte de una serie de axiomas que son parte del "Know-how" del diseño digital de sistemas de arquitectura de computadoras. Posteriormente, se va modelando a los axiomas hasta encontrar sus correspondientes definiciones matemáticas.

Inicialmente se parte de un axioma que se considera el más evidente: se observa que en el direccionamiento, la referencia a las direcciones absolutas de los procesadores y memorias actuales es consecutiva, en incrementos unitarios de una dirección a otra hacia direcciones más altas, o en decrementos unitarios hacia otras más bajas, siendo este patrón constante. Además, el mapeo básicamente es un problema de correspondencias entre las direcciones absolutas y las direcciones mapeadas, siendo esta relación lineal. Según esto se conciben dos postulados:

**Postulado 1:** La relación entre las direcciones absolutas y direcciones mapeadas es lineal y, por lo tanto, una línea recta define esa relación.

**Postulado 2:** La razón entre cualquier par de referencias unitarias a las

direcciones absolutas y mapeadas se supone igual a 1.

Por lo general se utilizan números enteros positivos como referencia a cada localidad direccionada, no se nombra con números negativos ni imaginarios. Según este axioma se concibe parcialmente el lugar geométrico para el mapeo descrito, con el siguiente postulado:

**Postulado 3:** El plano cartesiano en su primer cuadrante se presenta como la mejor opción para representar el mapeo, en donde el eje vertical es la dirección mapeada, el eje horizontal es la dirección absoluta a mapear y la línea recta define al mapeo.

En el mapeo se permite que un procesador proyecte su dirección absoluta a una localidad de memoria no inmediata a él, llamada memoria mapeada, cuya referencia es de acuer-

do a la dirección absoluta, lo cual genera el siguiente postulado:

**Postulado 4:** La dirección absoluta del procesador es la variable independiente **x** de la ecuación cartesiana, y la dirección mapeada es la variable dependiente **y**.

En la **figura 1** se muestra un caso que permite visualizar el mapeo de una memoria que puede direccionar hasta  $2^{10}$  (0 - 1023) localidades de memoria con un procesador cuyo direccionamiento es de  $2^{16}$  (0 - 65535). La memoria es mapeada desde la base del mapa de memoria del procesador, de modo que la correspondencia inicia desde 0 hasta 1023, como se muestra en la **figura 2**.

Con los axiomas y postulados anteriores se puede establecer el plano cartesiano para el mapeo de la me-

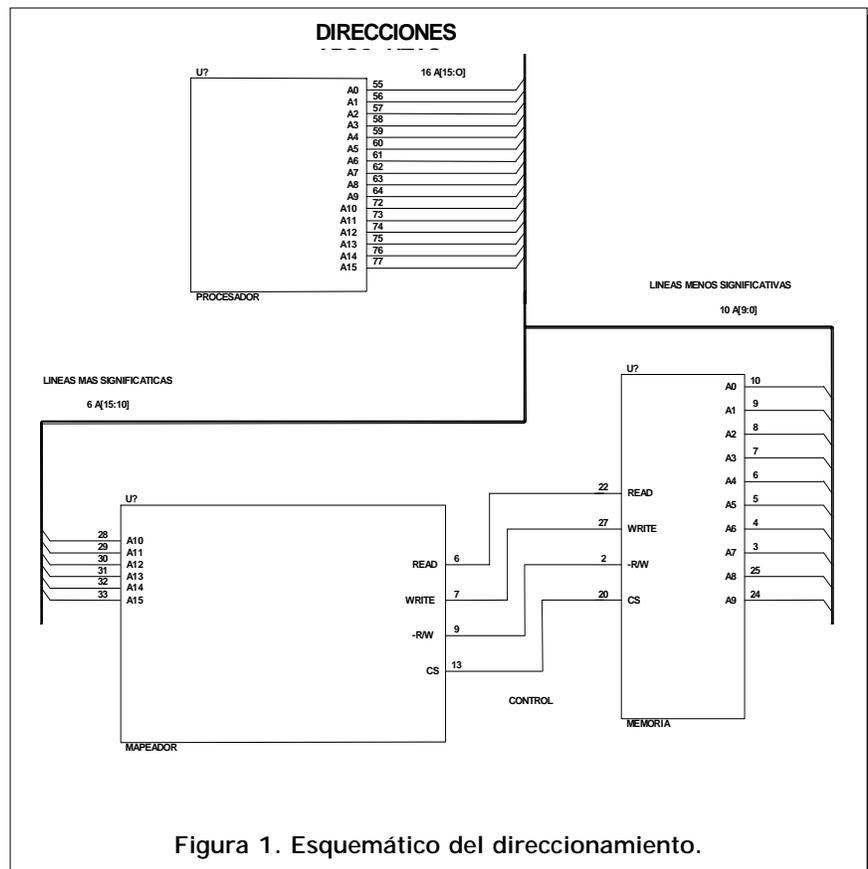


Figura 1. Esquemático del direccionamiento.

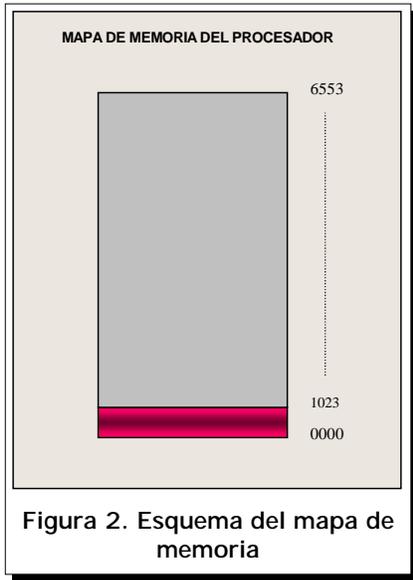


Figura 2. Esquema del mapa de memoria

moria sobre el mapa del procesador, de acuerdo al siguiente postulado:

**Postulado 5:** La figura 3 es el sistema de referencia coordenado cartesiano para el mapeo de la memoria en el direccionamiento del procesador; la correspondencia de las direcciones absolutas y las direcciones mapeadas con pendiente unitaria va desde 0 hasta 1023.

Ahora, según los postulados se puede establecer la siguiente razón:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 \quad \text{ecn.1}$$

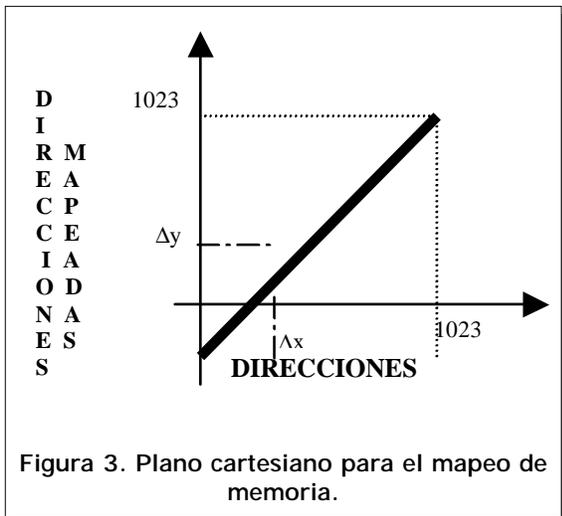


Figura 3. Plano cartesiano para el mapeo de memoria.

en donde,  $\Delta x$  es un incremento en las direcciones absolutas, y es su correspondiente incremento en las direcciones mapeadas. Puesto que ambas son siempre cantidades constantes y finitas con valores definidos, la ecuación 1 es una simple fracción, e inapropiada para encontrar una solución al mapeo.

Entonces, se necesita de una condición para transformar la comparación anterior a una comparación entre dos cantidades variables.

**Hipótesis:** Se establece que el direccionamiento de una dirección absoluta es un factor variable en el mapeo, y que es condicionante para que el mapeo sea un fenómeno variable. Además, se puede considerar al mapeo como un conjunto tal que sus componentes son, para fines prácticos, pequeños comparados con el conjunto en sí, y cuyo lugar geométrico se muestra en la figura 4.

Por la condición anterior, la ecuación 1 se transforma en lo siguiente:

solución define el mapeo potencial de un procesador, y así también se obtiene la ecuación cartesiana que define la línea de la figura 4, de modo que la solución es:

$$\int dy = \int dx$$

$$y + c1 = x + c2$$

donde  $c1, c2$  son constantes.

Se considera que las constantes de integración, para fines prácticos  $c1$  y  $c2$  son iguales, ya que cualquier factor añadido al direccionamiento de las direcciones absolutas estará reflejado en el direccionamiento de las direcciones mapeadas; además las cons-

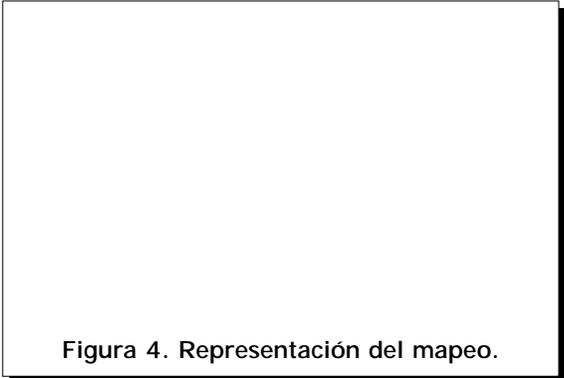


Figura 4. Representación del mapeo.

tantes de integración son cantidades independientes de las variables de integración, finalmente:

ecn.2

$$y=x \quad \text{ecn. 4}$$

La ecuación 4, define el mapeo para el mapa de memoria del procesador, por lo tanto, deberá acotarse como sigue:

ecn. 5

La ecuación 5, es la expresión cartesiana que define al mapeo de la figura 3, y en donde los valores mayores a 1023 desde la perspectiva de la memoria mapeada son direcciones que no existen. El siguiente postu-

Ahora, se tiene que la ecuación 2 no es una simple fracción, sino que es el valor límite de una fracción, y la operación de hallar su coeficiente diferencial, se simboliza como sigue:

$$\frac{dy}{dx} = 1 \quad \text{ecn.3}$$

La ecuación 3 es una ecuación diferencial cuya

lado describe qué son los valores alrededor a 1023:

**Postulado 6:** Se establece que los números algebraicos son direcciones que corresponden a las raíces de la ecuación 5, además que esta última ecuación permite deducir que los números trascendentes son todas las direcciones que están en el intervalo

desde la perspectiva del mapa de memoria del procesador. En realidad, todas las direcciones por arriba de 1023 podrían ser los números trascendentes para la ecuación 4. Ahora, si se considera que el submapeo definido en la ecuación 5 es en sí un pequeño punto con respecto al mapeo, se llega a la siguiente conclusión:

*El mapeo es un conjunto indefinidamente grande comparado con cualquiera de sus elementos o cualquier combinación de estos.*

Así se llega a la demostración del teorema y además se derivan dos hechos computacionales que pueden ser expresados con los siguientes corolarios:

**Corolario1:** Los números algebraicos en un mapeo son todas las direcciones absolutas del mapa de memoria del procesador que son mapeadas en la memoria.

**Corolario2:** Los números trascendentes en un mapeo son todas las direcciones absolutas del mapa de memoria del procesador que no son mapeadas en dicha memoria, o que son mapeadas en otra memoria, o en algún dispositivo de E/S.

Finalmente, el mapeador deberá incluir la conexión entre el procesador y la memoria mapeada cuando se presenten todas las direcciones mayores a 1023 (los números trascendentes). Así, la **figura 1** se amplía

para integrar un buffer de tercer estado en el mapeador para separar las direcciones que no serán mapeadas.

---

**CONCLUSIÓN**

---

El cálculo diferencial y el concepto de conjunto son dos métodos apropiados para postular la conceptualización del mapeo así como la capacidad del procesador para direccionar tanto a los dispositivos de E/S como a la memoria, ya sea esta externa como las SRAM o DRAM, o interna como la cache.

Finalmente, se establece que el mapeador es en sí una ecuación diferencial que se soluciona o no de acuerdo al direccionamiento del mapa de memoria de un procesador en un determinado momento.

---

**RESULTADOS**

---

La investigación realizada en este trabajo apoya a una de las líneas de investigación actualmente en desarrollo en el Laboratorio de Electrónica del CIC, así como la justificación de un tema de tesis para la Maestría en Ingeniería de Cómputo del mismo Centro, titulada:

“Implementación del Teorema de Cantor en una FPGA para solucionar el direccionamiento de memoria mapeada”

Los resultados de este artículo son una condición necesaria para describir y plantear la demostración del Teorema de Cantor (Los puntos del plano siguen la potencia del continuo) en el fenómeno computacional del direccionamiento de dispositivos de entrada/salida.

---

**BIBLIOGRAFÍA**

---

- [1] Amillo Jose M. y De Arriaga Fernando, “Análisis Matemático con Aplicaciones a la Computación”, Mc. Graw-Hill.
- [2] Goursat Edovard, “A Course in Matematica Analysis”, Dover Publications,inc.
- [3] Hijab Omar, “Introduction to Calculus and Classical Analysis”, Springer.
- [4] Hubbard, L. Ron, “Research & Discovery Series”, Volumen 7, August 7- October 12, 1951.
- [5] James & James, “Mathematics Dictionary”, Third Edition, D.Van Nostrand, inc.
- [6] Kolmogorav A. N. and Fomin S. V., “Introductory Real Analysis”, Prentice Hall, inc.
- [7] Maravall Casesnoves, Dario, “Diccionario de Matemática Moderna”, Addison-Wesley Iberoamericana.
- [8] Meyers Rechenduden, “The Universal Encyclopedia of Mathematics”, George Allen & Unwin LTD.
- [9] Reddick, H. W., “Matemáticas Superiores para Ingenieros”, CECSA.
- [10] Thompson, Silvanus, “Calculus Made Easy”, Third Edition, St Martin’s Press, New York, 1987.