Análisis Cuaterniónico Real y Complejo: Una Introducción

Dr. Antonio Castañeda Solís
Profesor del CIDETEC-IPN

Este trabajo pretende ser una breve introducción a los aspectos básicos del análisis cuaterniónico y sus aplicaciones. Se maneja la noción de un cuaternión como una generalización de los números complejos y se brinda la definición de los bicuaterniones.

Se consideran únicamente las ideas más importantes del álgebra cuaterniónica, describiendo algunas de sus propiedades y se introduce la representación de los cuaterniones en algunas otras álgebras. Adicionalmente se mencionan algunas aplicaciones del análisis cuaterniónico en los campos de la Física, la Matemática, y la ingeniería.

Introducción

En una gran cantidad de documentos y artículos especializados es posible encontrar aplicaciones del álgebra de cuaterniones reales y complejos.

En el área de las comunicaciones móviles, el álgebra de cuaterniones fue aplicada al estudio de las ecuaciones de Maxwell (descripción de los aspectos de propagación de las ondas electromagnéticas) ya desde los trabajos del mismo Maxwell. Por lo tanto, no resulta extraño que una gran parte de los trabajos científicos modernos utilicen este tipo de técnicas en la resolución del sistema de Maxwell, obteniéndose resultados sorprendentes en algunos casos (ver [5], [6], [10], [11]).

Recientemente se ha utilizado el análisis cuaterniónico en áreas de ingeniería tales como la seguridad en redes inalámbricas (ver [13] y [14]), y en los sistemas de procesamiento de señales e imágenes [15]. Las aplicaciones en la Física son abundantes y se sugiere la consulta de los documentos [1], [2], y [4].

No obstante la gran cantidad de aplicaciones posibles en ingeniería, no podemos dejar de resaltar el interés puramente matemático que por sí mismos aportan los cuaterniones y su álgebra asociada; como referencia es posible apreciar [7] y [12].

Cuaterniones

Consideremos la igualdad siguiente,

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y), \tag{1}$$

donde $x, y \in \mathbb{R}$, la cual se verifica directamente. El hecho de poder representar el lado izquierdo de la igualdad (1) como un producto es conocido como factorización [8], y en este caso nos bastan los números reales para poder factorizar la expresión $x^2 - y^2$.

Es posible considerar algunas otras expresiones y preguntarnos acerca de la forma de factorizarlas. Por ejemplo, consideremos la expresión

$$x^2 + y^2,$$

si utilizamos únicamente los números reales no existe una factorización posible para esta expresión. Pero, si utilizamos los números complejos tenemos que

$$x^2 + y^2 = (x+iy)(x-iy),$$

donde i es la unidad imaginaria definida como $i = \sqrt{-1}$

Es decir, si consideramos el número complejo $z = (x+iy)$ y lo multiplicamos por su conjugado complejo $z^* = (x-iy)$ obtenemos la factorización buscada.

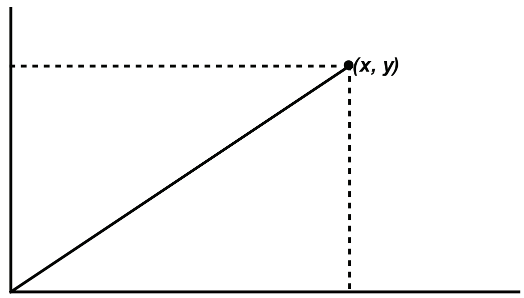

Figura 1. punto con coordenadas (x,y) ubicado en el plano.

Esto es, sea $z \in \mathbb{C}$, entonces

$$z\,z^* = z^*\,z = x^2 + y^2 \qquad (2)$$

La igualdad (2) refleja el hecho de que el álgebra de los números complejos es conmutativa.

Consideremos un punto con coordenadas (x, y) ubicado en el plano (**Figura 1**).

La distancia del punto (x, y) hacia el origen se define como:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \qquad (3)$$

Comparando (2) y (3) podemos escribir

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Es decir, la distancia entre dos puntos en el plano (y por lo tanto los vectores en dos dimensiones), puede ser expresada mediante el producto de dos números complejos z y z^*.

Consideremos ahora la distancia con respecto al origen en un espacio de cuatro dimensiones, esto es

$$\sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

La pregunta inmediata es ¿cómo podemos factorizar la expresión $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$?. Desde luego, esto no puede realizarse utilizando los números reales y ni siquiera los números complejos.

En forma análoga al procedimiento usado con los números complejos podemos introducir tres unidades imaginarias definidas en la forma siguiente

$$i_1^2 = i_2^2 = i_3^2 = -1.$$

Si asumimos que las unidades imaginarias introducidas cumplen con las propiedades

$$i_1 i_2 = -i_2 i_1 = i_3,$$
$$i_2 i_3 = -i_3 i_2 = i_1,$$
$$i_3 i_1 = -i_1 i_3 = i_2,$$

es fácil comprobar que la factorización buscada se expresa en la forma siguiente

Al igual que en el caso complejo, la factorización es posible mediante la introducción de nuevos números, los cuales en este caso se llaman cuaterniones. Estos números fueron inventados en 1843 por Sir Lord Hamilton y se definen formalmente como:

Sea $q \in \mathrm{H}(\mathrm{R})$, entonces

$$q = \sum_{k=0}^{3} q_k i_k = q_0 i_0 + q_1 i_1 + q_2 i_2 + q_3 i_3,$$

donde $i_0 = 1$ y q_k son números reales. $\mathbb{H}(\mathbb{R})$ denota el álgebra de los cuaterniones reales.

Un cuaternión tiene representaciones en distintas álgebras. En terminos vectoriales, un cuaternión puede representarse como

$$q = Sc(q) + Vec(q),$$

donde

$$Sc(q) := q_0,$$
$$Vec(q) := \vec{q} = \sum_{k=1}^{3} q_k e_k.$$

Un cuaternión de la forma $q = \vec{q}$ es llamado puramente vectorial. Los cuaterniones puramente vectoriales son identificados con los vectores en $\mathbb{R}^3$.

En el conjunto $\mathbb{H}(\mathbb{R})$ se define la conjugación cuaterniónica en la forma

$$\bar{q} = q_0 - \vec{q},$$

misma que ya habíamos utilizado en la factorización de la expresión $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Por lo tanto, podemos escribir

$$q \cdot \bar{q} = |q|^2,$$

donde

$$|q| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$$

es la distancia en $\mathbb{R}^4$.

La analogía con los números complejos es total, y el análisis cuaterniónico se considera como la generalización más adecuada del análisis complejo para el espacio de cuatro dimensiones.

Si en la definición de un cuaternión,

$$q = \sum_{k=0}^{3} q_k i_k$$

suponemos que q_k son números complejos y que la unidad imaginaria compleja i conmuta con las unidades imaginarias i_1, i_2, i_3 obtenemos el conjunto de cuaterniones complejos o bicuaterniones denotado como $\mathbb{H}(\mathbb{C})$.

Conclusiones

El hecho de poder representar puntos en el plano como parejas ordenadas abre la posibilidad de utilizar el análisis complejo en aplicaciones de ingeniería tales como el procesamiento de imágenes en dos dimensiones. Pero, dado que el mundo en el cual vivimos está compuesto de más de dos dimensiones, es muy natural intentar representar los problemas planteados en una y dos dimensiones como problemas en más dimensiones.

La importancia del álgebra de cuaterniones se enfatiza a través de aplicaciones en áreas tan diversas como la física relativista y la seguridad en redes de computadoras inalámbricas. Se brindan, además, referencias a distintos trabajos de cada una de las áreas mencionadas.

Se introdujeron los conceptos de cuaterniones reales y bicuaterniones como una generalización de los números complejos, resaltando las ideas principales y más intuitivas y delegando para trabajos subsecuentes una exposición más formal y compleja de los distintos aspectos del álgebra de cuaterniones (reales y complejos) y sus aplicaciones en la ingeniería.

Bibliografía

[1] Bagrov V.; Gitman D.M. *Exact Solutions of Relativistic Wave Equations*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1990.

[2] Berezin A. V.; Kurochkin Yu. A. and Tolkachev E. A., *Quaternions in relativistic physics*. Minsk: Nauka y Tekhnika, 1989.

[3] Bernstein S. Factorization of Solutions of the Schrödinger Equation. *Proceedings of the symposium: Analitical and Numerical Methods in Quaternionic and Clifford Analysis*, Seiffen, 1996, Eds. K. Gürlebeck and W. Sprösig, 1-6.

[4] Bernstein S. *Fundamental Solutions for Dirac-type Operators*. Banach Center Publications, v.37 « Generalizations of Complex Analysis and their Applications in Physics», Warsaw, 1996, J. Lawrynowicz (ed), 159-172.

[5] Castañeda A.; Kravchenko V. Sobre algunas nuevas representaciones integrales para el campo electromagnético en medios no homogéneos. *Memorias del 7o. Congreso de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas*, IPN, México, 2003.

[6] Castañeda A.; Kravchenko V. *New applications of pseudoanalytic function theory to de Dirac equation*. J. Phys. A: Math. Gen. 38 (2005) 9207-9219.

[7] Kravchenko V.; Shapiro M. *Integral representations for spatial models of mathematical physics*. Pitman research notes in mathematics series, 1996.

[8] Kravchenko V. *Elementos del análisis moderno y teoría electromagnética*. Instituto Mexicano de Comunicaciones, serie técnica matemáticas aplicadas, 1996.

[10] Kravchenko V. *A new method for obtaining solutions of the Dirac equation*. Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen, 2000, v. 19, No. 3, 655-676.

[11] Kravchenko V. *Applied quaternionic analysis. Maxwell's system and Dirac's equation*. World Scientific, Functional-analytic and complex methods, their interactions, and applications to partial differential equations, Ed. by W. Tutschke, 143-160, 2001.

[12] Kravchenko V. Quaternionic Reformulation of Maxwell Equations for Inhomogeneous Media and New Solutions. *Journal for Analysis and its Applications*, Vol. 21 (2002), No 1, 21-26.

[13] Kravchenko V. Applied Quaternionic Analysis Heldermann Verlag, Research and Exposition in mathematics Series, v. 28, 2003.

[14] Nagase T. Komata M.; Araki T. Secure signals transmission on quaternion encryption scheme. *Proceedings of the 18th International Conference on Advanced Information Networking and Application (AINA'04)*, 2004 IEEE.

[15] Nagase, T. et al. A new quadripartite public-key cryptosystem. *International Symposium on Communications and Information Technologies 2004 (ISCIT 2004)*, Sapporo, Japan, October 26-29, 2004.

[16] Sangwine S. J. *Fourier transforms of colour images using quaternion or hypercomplex numbers*. Elect. Lett., vol. 32, no. 21, p. 1979-1980, Oct. 1996.