

Ayudas de diseño para traves de sección transversal rectangular con cartelas parabólicas: Parte 2

Rosa Margarita Luévanos Soto, Arnulfo Luévanos Rojas, Sandra López Chavarría,
Manuel Medina Elizondo

Universidad Autónoma de Coahuila,
Instituto de Investigaciones Multidisciplinaria,
México

{luevanos_94, arnulfol_2007, sandylopez5}@hotmail.com, drmanuelmedina@yahoo.com.mx

Resumen. En este trabajo se presentan las ayudas de diseño más utilizadas para vigas de sección rectangular con cartelas parabólicas. La viga se encuentra sujeta a una carga concentrada localizada en cualquier parte de la viga, y toma en cuenta las deformaciones por flexión y cortante para obtener los factores de momentos de empotramiento, que es la principal aportación de este trabajo de investigación. La primera parte de este trabajo presenta las ayudas de diseño para el mismo tipo de vigas para obtener los factores de transporte o arrastre, los factores de rigidez, y los factores de momentos de empotramiento se obtienen para una carga uniformemente distribuida. Las variables y las simplificaciones son las mismas que en la parte 1. Además, se muestra un ejemplo numérico utilizando las ayudas de diseño, y se compara con las ecuaciones previamente descritas por los autores en un artículo anterior a este documento, y los resultados son iguales con una aproximación de tres dígitos. Por lo tanto, las ayudas de diseño proporcionan una gran herramienta de ayuda para los ingenieros estructurales por el gran ahorro de tiempo.

Palabras clave. Ayudas de diseño, vigas rectangulares, cartelas parabólicas, carga concentrada, factores para momentos de empotramiento.

Design Aids for Beams of Rectangular Cross Section with Parabolic Haunches: Part 2

Abstract. In this paper, the most used design aids for beams of rectangular section with parabolic haunches are presented. The beam is found subjected to concentrated load localized anywhere on the beam, and takes into account the bending and shear

deformations to obtain the fixed-end moments factors, which is the main contribution of this research work. The first part of this work presents the design aids for the same type of beams to obtain the carry-over factors, the stiffness factors, and the fixed-end moments factors are obtained for a uniformly distributed load. The variables and the simplifications are the same as in the part 1. Also, a numerical example is shown using the design aids, and it is compared with the equations previously presented by the authors in a paper prior to this document, and the results are equal to a three-digit approximation. Therefore, design aids provide a great tool of help for structural engineers by the greatly time-savings.

Keywords. Design aids, rectangular berms, parabolic haunches, concentrated load, fixed-end moments factors.

1. Introducción

Las traves con cartelas o acartelamientos se definen como elementos estructurales que varían en sección transversal en los extremos de la conexión con las columnas con el fin de reducir las deflexiones y momentos positivos cuando los negativos aumentan.

Una trave con cartelas se utiliza básicamente por dos razones:

1. Arquitectura: Cuando la arquitectura de la estructura lo demanda como iglesias y capillas.
2. Estructural: Cuando la construcción tiene grandes claros y cargas elevadas, con el fin de reducir deflexiones y momentos positivos,

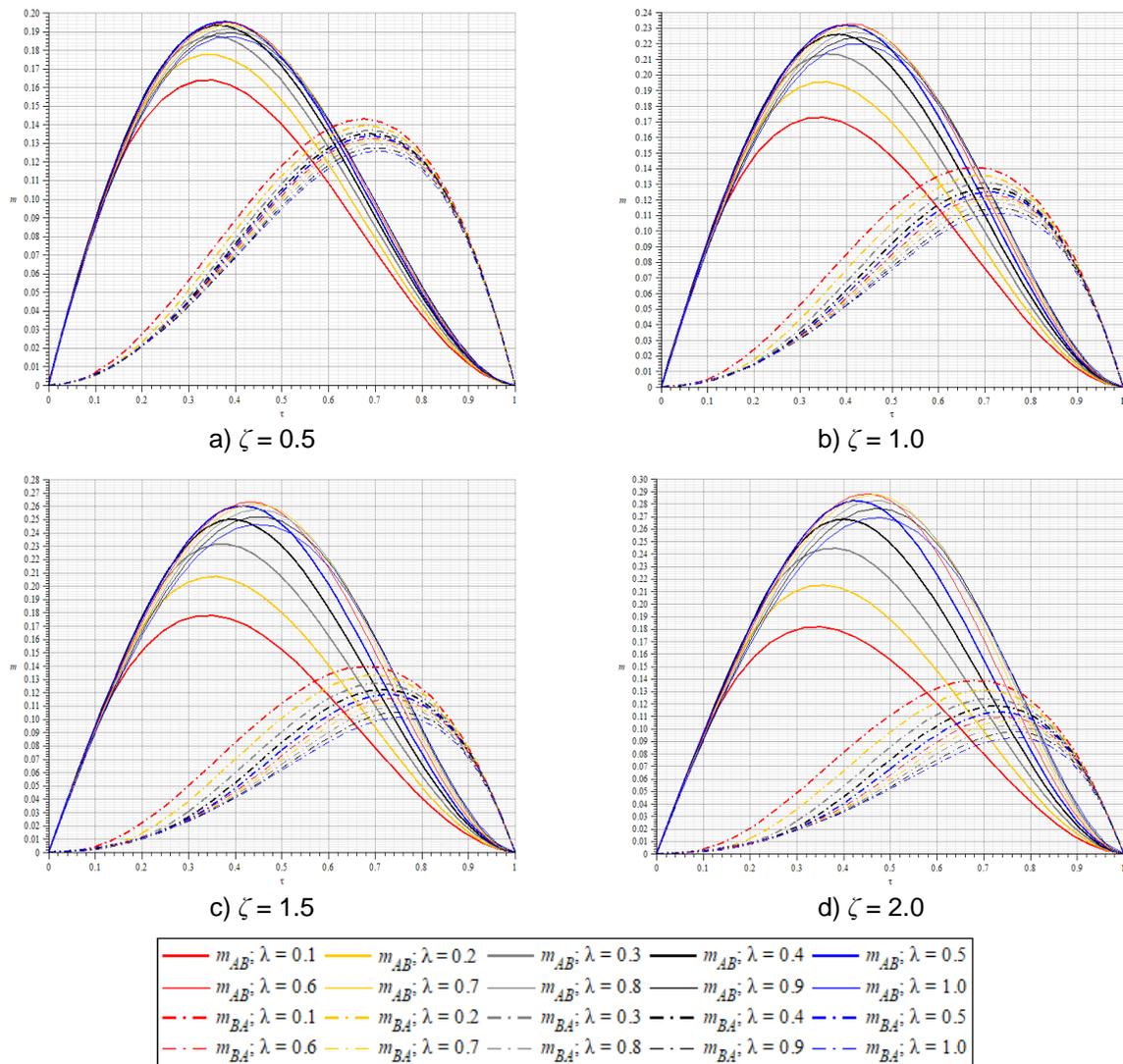


Fig. 1. Factores de momentos de empotramiento para carga concentrada ($c = 0.0L$)

y consecuentemente aumentar los momentos negativos que aparecen en los extremos de la trabe.

En algunas ocasiones, para el cálculo de las trabes se presentan, que los esfuerzos a soportar en su unión con la columna son considerables. Para absorber estos esfuerzos, bastaría con aumentar la sección de acero de refuerzo en estas zonas peligrosas. Pero esto no siempre es económico y se utiliza otra solución: la trabe con cartelas en sus extremos para obtener un

aumento en la sección de concreto (mayor canto efectivo o peralte efectivo), y así, el brazo de palanca de las varillas de acero de refuerzo aumentan.

Las ayudas de diseño se representan por medio de tablas y gráficas que describen procedimientos con los que se pretende acortar el trabajo rutinario de los diseños estructurales.

Los trabajos más relevantes sobre el tema de ayudas de diseño para el análisis estructural se muestran en la parte 1 [1-17]. Otros trabajos para

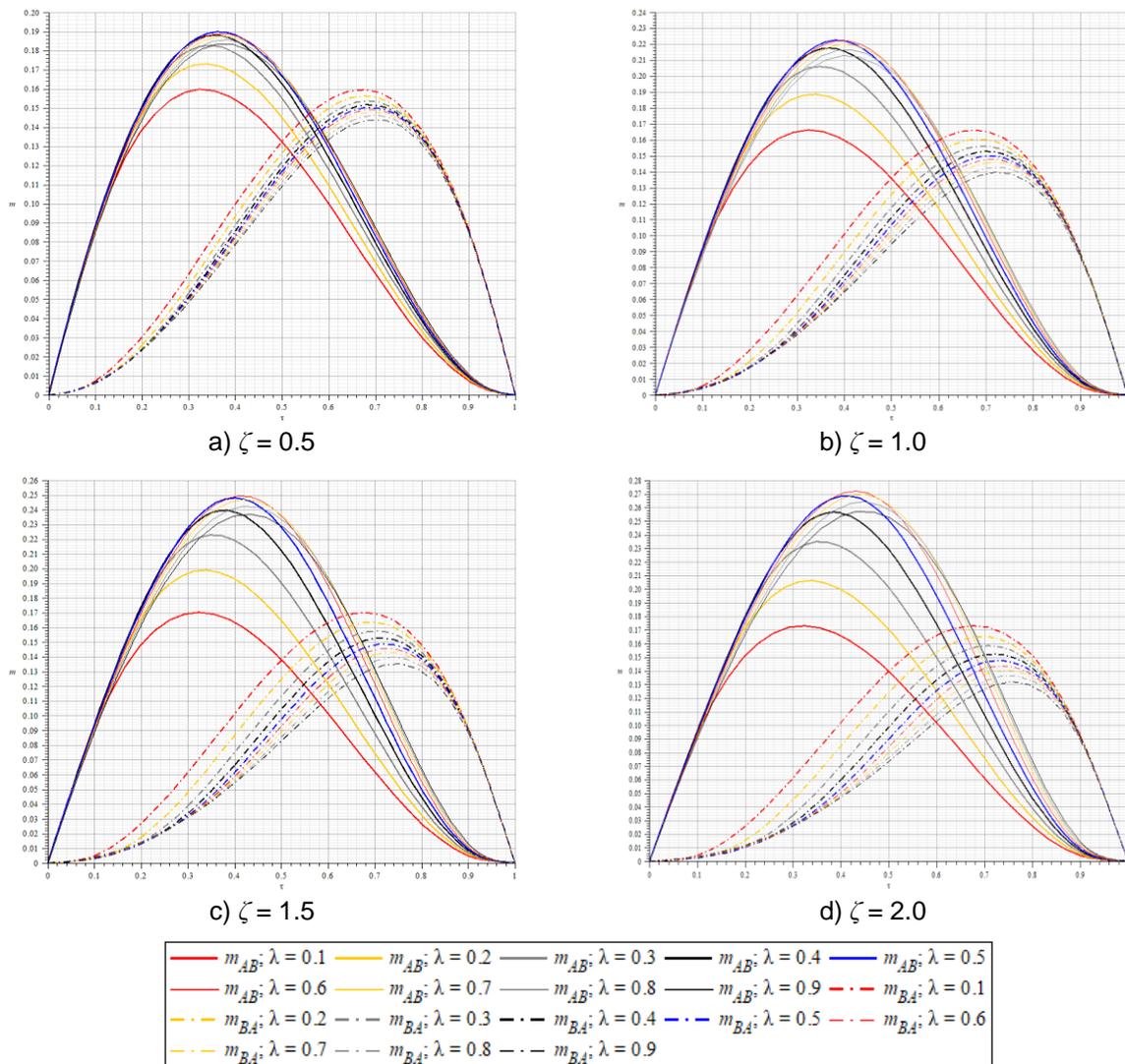


Fig. 2. Factores de momentos de empotramiento para carga concentrada ($c = 0.1L$)

secciones variables (miembros no prismáticos) se presentan en la parte 1 [18-21].

Los principales trabajos sobre el tema de vigas de sección transversal rectangular con cartelas parabólicas se muestran en la parte 1 [22-25].

Por lo tanto, la revisión de la literatura muestra claramente que no existe una relación cercana con el tema de ayudas de diseño para traves de sección rectangular con cartelas parabólicas sometidas a una carga concentrada ubicada en cualquier parte de la trave para obtener los

factores de momentos de empotramiento que es abordado en este trabajo. Este trabajo presenta las ayudas de diseño para traves de sección transversal rectangular con cartelas parabólicas sometidas a una carga concentrada localizada en cualquier parte de la trave para obtener los factores de momentos de empotramiento, que es el aporte de esta investigación. Las ayudas de diseño se desarrollan utilizando las ecuaciones descritas anteriormente [25]. Las simplificaciones son las mismas como en la parte 1. También, un ejemplo se presenta para mostrar la simplicidad

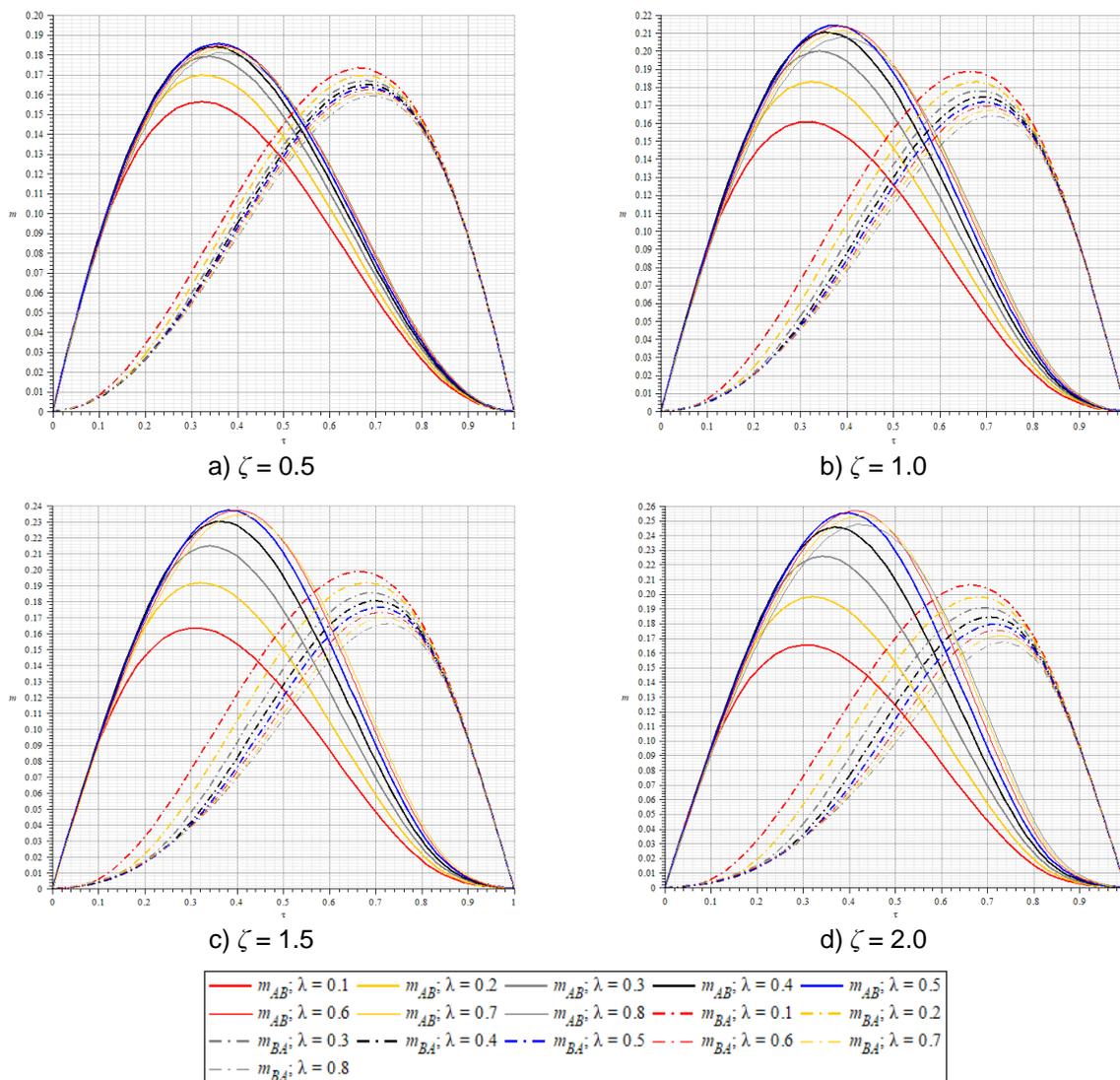


Fig. 3. Factores de momentos de empotramiento para carga concentrada ($c = 0.2L$)

y efectividad de las ayudas de diseño propuestas en este documento para traveses de sección transversal rectangular con cartelas parabólicas sometidas a una carga concentrada.

2. Ayudas de diseño

La Figura 1 de la parte 1 muestra una viga isométrica de sección transversal rectangular con cartelas parabólicas en cada extremo.

Las ayudas de diseño para traveses de sección rectangular con cartelas parabólicas consisten en obtener los factores de momentos de empotramiento para una carga concentrada localizada en cualquier parte de la longitud de la traveses mediante diagramas simplificados a partir de las ecuaciones propuestas por Sandoval-Rivas *et al.* [25].

Las simplificaciones realizadas son las siguientes: $u = s$ porque esta es la más utilizada por las formas arquitectónicas (estética), $h = 0.1L$

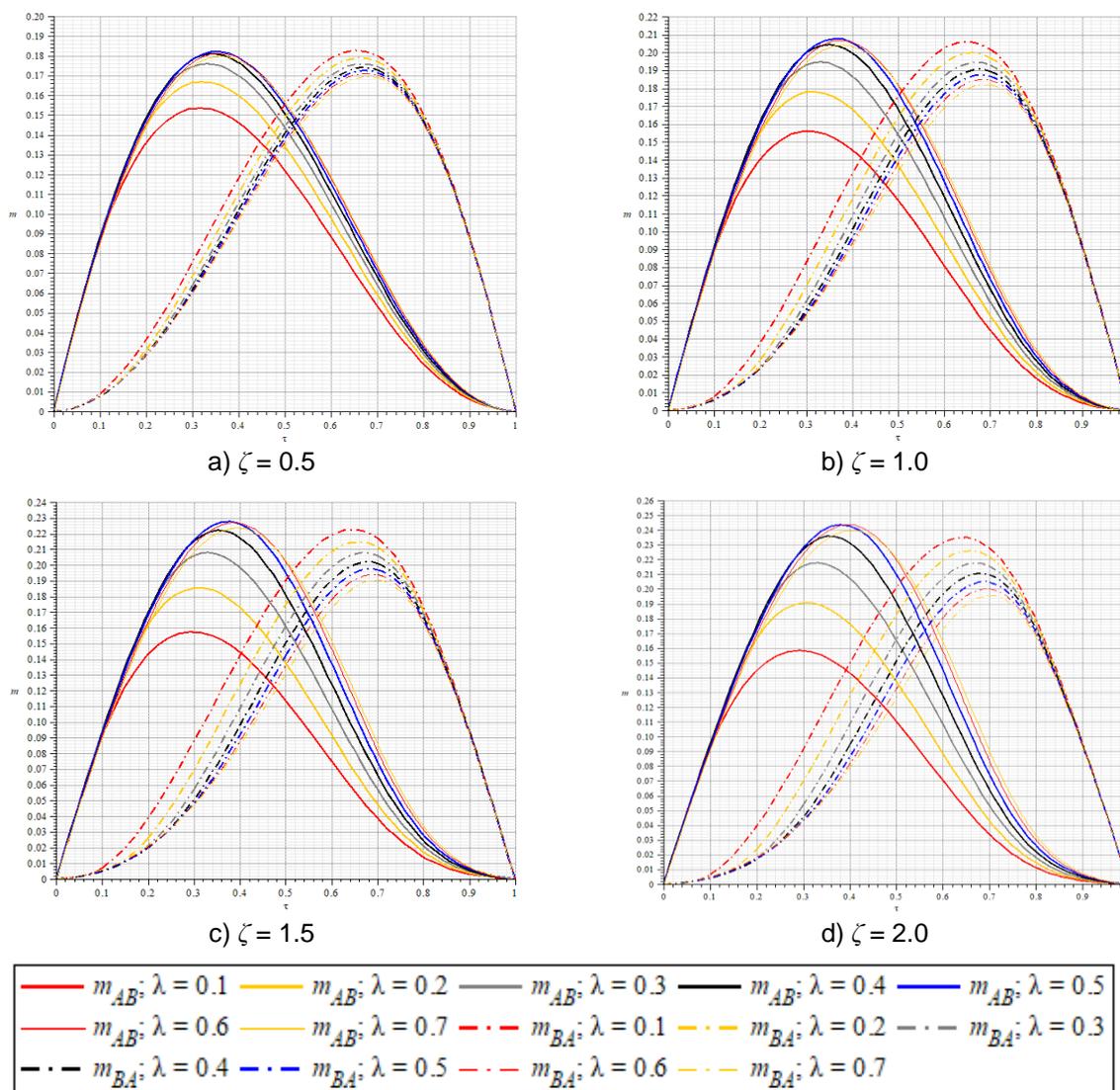


Fig. 4. Factores de momentos de empotramiento para carga concentrada ($c = 0.3L$)

que propone el código del ACI [26] para controlar las deflexiones.

Las ecuaciones de momentos de empotramiento para carga concentrada se obtienen a partir de las ecuaciones (15 y 16) para el caso 1 (cuando la carga P se localiza de $0 \leq x \leq a$) [25]:

$$M_{AB} = \frac{f_{22}\theta_{A1} - f_{12}\theta_{B1}}{f_{12}^2 - f_{11}f_{22}}, \quad (1)$$

$$M_{BA} = \frac{f_{12}\theta_{A1} - f_{11}\theta_{B1}}{f_{12}^2 - f_{11}f_{22}}, \quad (2)$$

donde: " M_{AB} " y " M_{BA} " son los momentos de empotramiento en sus respectivos apoyos; " f_{11} ", " f_{22} " y " f_{12} " son los coeficientes de flexibilidades; " θ_{A1} " y " θ_{B1} " son las rotaciones en cada apoyo, cuando la carga concentrada se ubica sobre la cartela izquierda (apoyo A).

Las ecuaciones de momentos de empotramiento para carga concentrada se

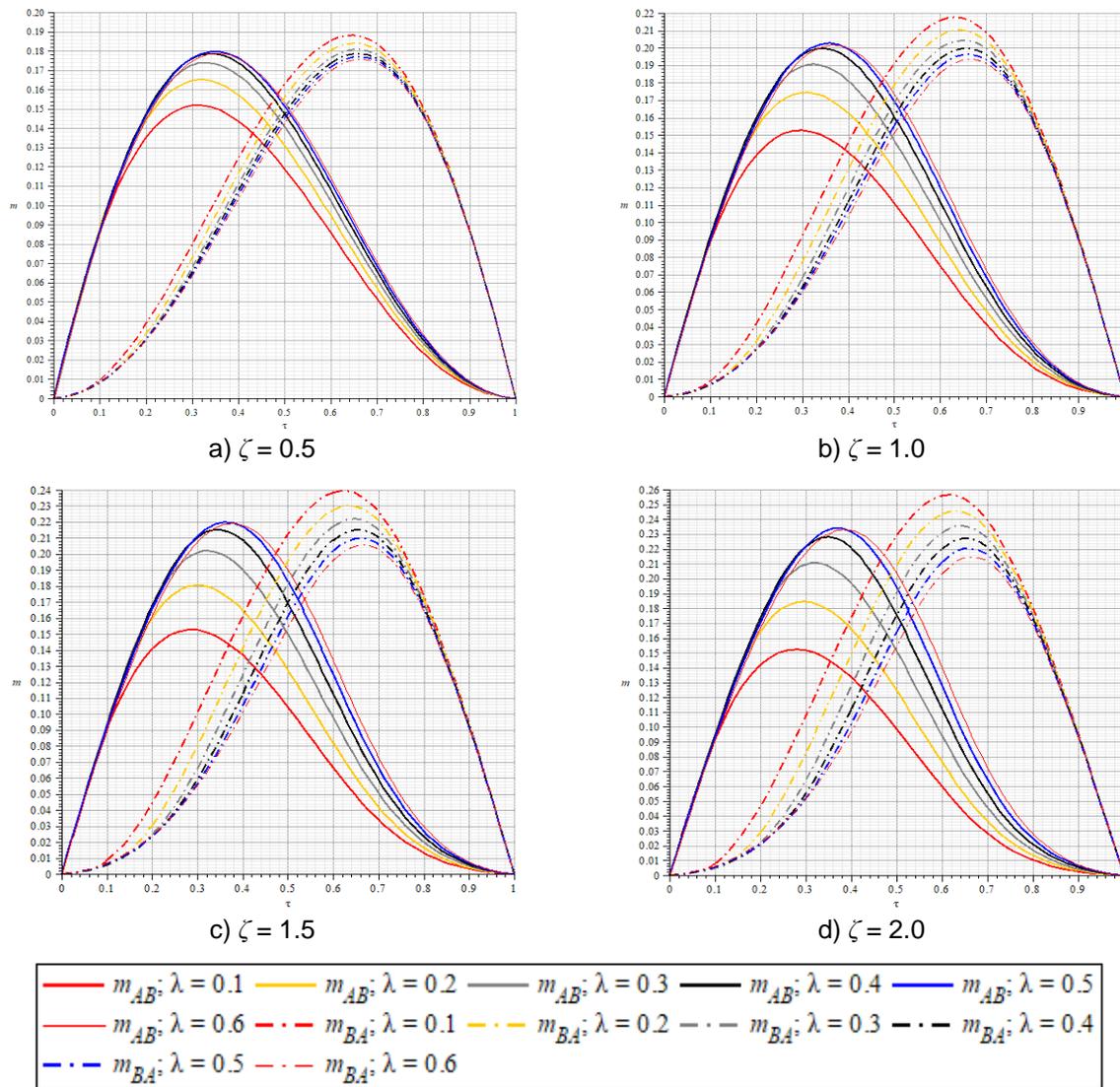


Fig. 5. Factores de momentos de empotramiento para carga concentrada ($c = 0.4L$)

obtienen a partir de las ecuaciones (17 y 18) para el caso 2 (cuando la carga P se encuentra de $a \leq x \leq L - c$) [25]:

$$M_{AB} = \frac{f_{22}\theta_{A2} - f_{12}\theta_{B2}}{f_{12}^2 - f_{11}f_{22}}, \tag{3}$$

$$M_{BA} = \frac{f_{12}\theta_{A2} - f_{11}\theta_{B2}}{f_{12}^2 - f_{11}f_{22}}, \tag{4}$$

donde: “ θ_{A2} ” y “ θ_{B2} ” son las rotaciones en cada apoyo, cuando la carga concentrada se encuentra en la parte central (sección constante).

Las ecuaciones de momentos de empotramiento para carga concentrada se obtienen a partir de las ecuaciones (19 y 20) para el caso 3 (cuando la carga P se ubica de $L - c \leq x \leq L$), [25]:

$$M_{AB} = \frac{f_{22}\theta_{A3} - f_{12}\theta_{B3}}{f_{12}^2 - f_{11}f_{22}}, \tag{5}$$

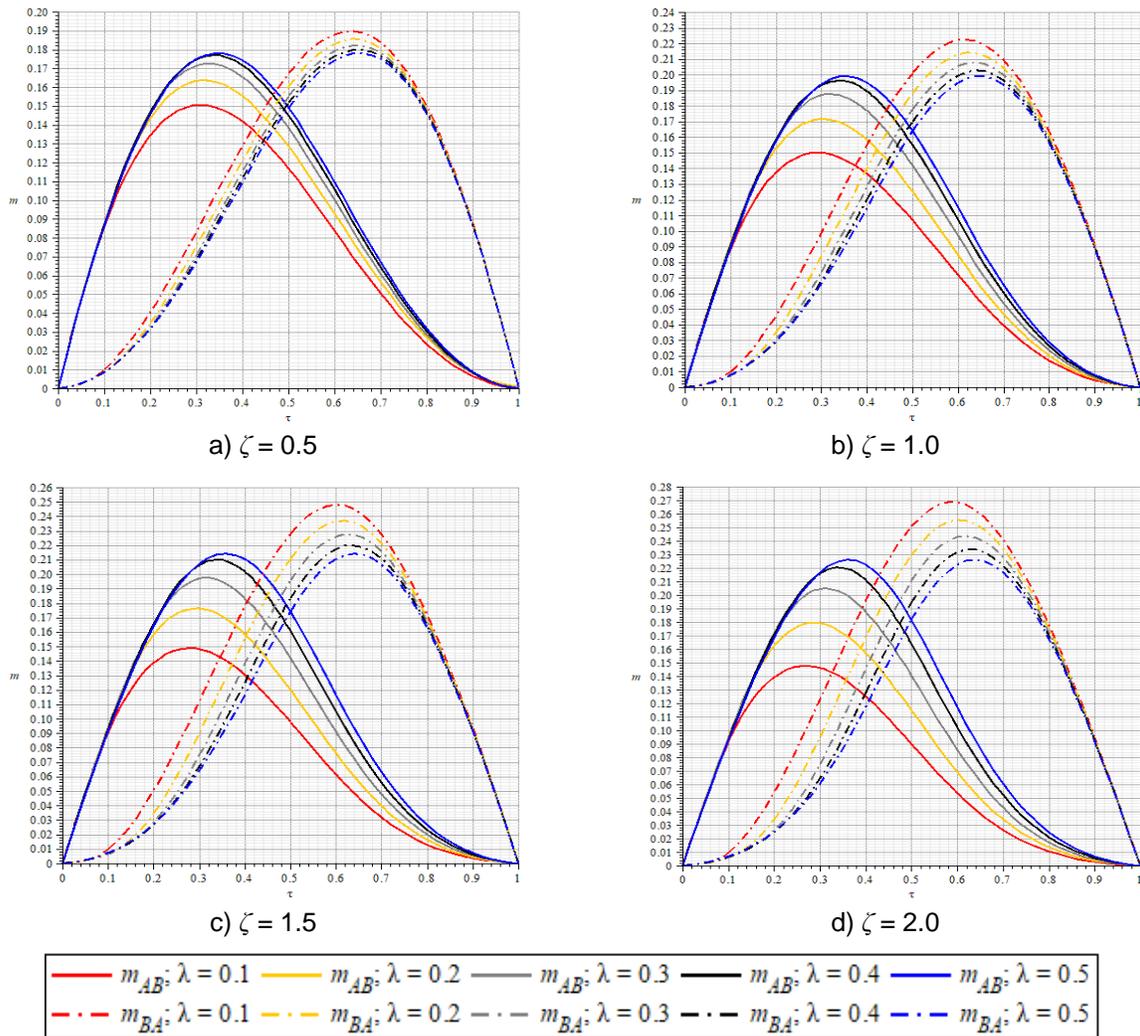


Fig. 6. Factores de momentos de empotramiento para carga concentrada ($c = 0.5L$)

$$M_{BA} = \frac{f_{12}\theta_{A3} - f_{11}\theta_{B3}}{f_{12}^2 - f_{11}f_{22}}, \quad (6)$$

donde: “ θ_{A3} ” y “ θ_{B3} ” son las rotaciones en cada apoyo, cuando la carga concentrada se localiza sobre la cartela derecha (apoyo B).

Las ecuaciones para obtener “ f_{11} ”, “ f_{22} ” y “ f_{12} ” se muestran en las ecuaciones (10, 11 y 12), respectivamente [24]. Las ecuaciones para encontrar “ θ_{A1} ” y “ θ_{B1} ”, “ θ_{A2} ” y “ θ_{B2} ”, “ θ_{A3} ” y “ θ_{B3} ” se presentan en las ecuaciones (9 a 14), respectivamente [25].

Sustituyendo las ecuaciones de los coeficientes de flexibilidades y las rotaciones en las ecuaciones (1 a 6) se obtienen los factores de momentos de empotramiento como sigue:

$$M_{AB} = m_{AB}PL, \quad (7)$$

$$M_{BA} = m_{BA}PL, \quad (8)$$

donde: “ m_{AB} ” y “ m_{BA} ” son los factores de momentos de empotramiento, “ P ” es la carga concentrada y “ L ” es la longitud de la trabe.

Los factores de momentos de empotramiento “ m_{AB} ” y “ m_{BA} ” se presentan en función de E

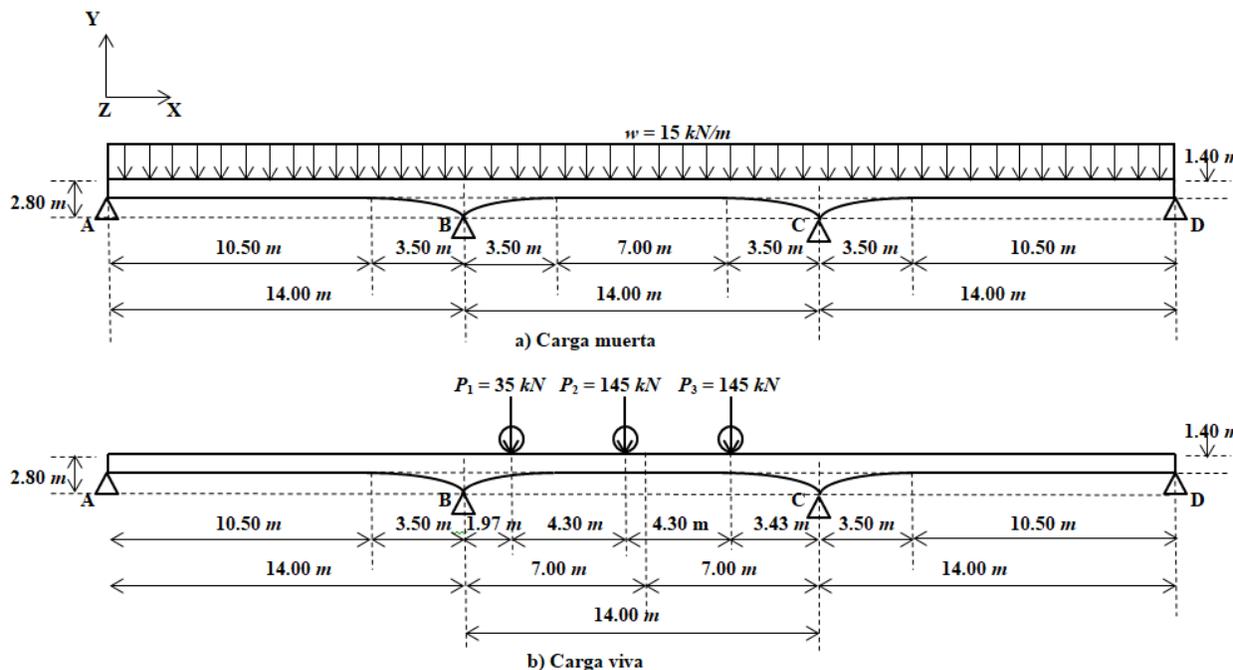


Fig. 7. Trabe continua de sección transversal rectangular con cartelas parabólicas

(módulo de elasticidad), G (módulo de cortante), ν (coeficiente de Poisson), a (longitud horizontal de la cartela parabólica izquierda), b (ancho de la viga), c (longitud horizontal de la cartela parabólica derecha), L (longitud de la trabe), u (altura de la cartela parabólica izquierda), s (altura de la cartela parabólica derecha), h (altura de la trabe en la parte central), e (el punto de ubicación de la carga a partir del apoyo A).

Las ayudas de diseño para factores de momentos de empotramiento se obtienen a partir de las ecuaciones (7 y 8) tomando en cuenta $u = s = \zeta h$ (ζ toma valores de 0.5, 1.0, 1.5, 2.0); $a = \lambda L$ (λ toma valores de 0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0); $c = \kappa L$ (κ toma valores de 0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9); $h = 0.1L$; $\tau = e/L$ (τ toma cualquier valor de 0 a 1); $\nu = 0.20$ para concreto [25]. Para $c = 0L$ se considera $u = \zeta h$; $s = 0$.

Las ayudas de diseño para factores de momento de empotramiento para carga concentrada se obtienen como sigue:

1. El material y las propiedades geométricas de la viga se definen ($c = \kappa L$, $h = 0.1L$, $\nu = 0.20$,

$u = s = \zeta h$, $a = \lambda L$), y para $c = 0L$ se considera $u = \zeta h$ y $s = 0$.

2. Sustituyendo cada valor de λ y κ en las ecuaciones (1, 3 y 5) para obtener m_{AB} y en las ecuaciones (2, 4 y 6) para obtener m_{BA} . Estas gráficas se muestran en función de τ . La manera de generar estas graficas es como sigue:
 - 2.1. En las ecuaciones (1 y 2) se fijan los valores de λ y κ , cuando la carga concentrada se ubica sobre la cartela izquierda (apoyo A). En las ecuaciones (3 y 4) se fijan los valores de λ y κ , cuando la carga concentrada se encuentra en la parte central. En las ecuaciones (5 y 6) se fijan los valores de λ y κ , cuando la carga concentrada se ubica sobre la cartela derecha (apoyo B).
 - 2.2. Las gráficas de las ecuaciones (1 y 2) toman los valores de 0 a λ (cartelas parabólica izquierda), las ecuaciones (3 y 4) toman los valores de λ a $1 - \kappa$ (parte central), las ecuaciones (5 y 6) toman

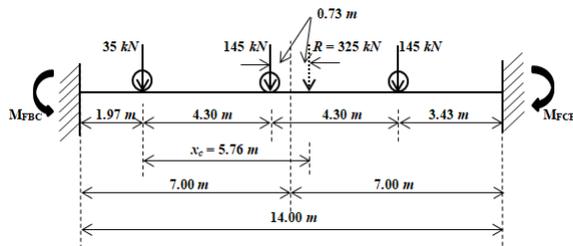


Fig. 8. Tres traves individuales

los valores de $1-\kappa$ a 1 (cartelas parabólica derecha).

- Las ecuaciones simplificadas se obtienen utilizando el software Derive.
- Ahora, las gráficas se obtienen usando el software Maple.

Todos los diagramas simplificados se muestran en función de τ para obtener los factores de momentos de empotramiento (m_{AB} y m_{BA}).

La Figura 1 muestra las gráficas para $a = (0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8$ y 0.9 y $1.0)$ L y $c = 0.0L$.

La Figura 2 presenta las gráficas para $a = (0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8$ y $0.9)$ L y $c = 0.1L$.

La Figura 3 muestra las gráficas para $a = (0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7$ y $0.8)$ L y $c = 0.2L$.

La Figura 4 presenta las gráficas para $a = (0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6$ y $0.7)$ L y $c = 0.3L$.

La Figura 5 muestra las gráficas para $a = (0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ y $0.6)$ L y $c = 0.4L$.

La Figura 6 presenta las gráficas para $a = (0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ y $0.5)$ L y $c = 0.5L$.

3. Aplicación de las ayudas de diseño

La Figura 7 muestra una trave continua para un puente carretero sobre cuatro apoyos de sección transversal rectangular con cartelas parabólicas en los apoyos internos. Los datos constantes para la trave continua son: $\nu = 0.20$ para concreto, $G = 5E/12$, $w = 15$ kN/m, $b = 0.70$ m. La Figura 6 de la parte 1 presenta las tres traves separadas y los momentos de empotramiento en sus extremos para carga uniformemente distribuida (carga muerta) en

cada apoyo. La Figura 8 muestra la posición crítica de las cargas vivas para la trave central por separado del puente carretero y sus momentos de empotramiento para carga concentrada (carga viva) en cada soporte; estas cargas vivas se obtienen de las especificaciones para el diseño de puentes por el AASHTO (American Association of State and Highway Transportation Officials) [27].

Los momentos finales se obtienen usando las ayudas de diseño de la parte 1 para carga uniformemente distribuida y las ayudas de diseño para cargas concentradas propuestas en este documento, y la solución se obtiene por los métodos matriciales.

Nota: la distancia horizontal de las cartelas se consideran de 3.5 m, porque generalmente los puntos de inflexión se ubican a $1/4$ de la longitud de la trave a partir de los apoyos.

Los datos de la trave A-B son: Para la carga muerta (carga uniformemente distribuida), todos los factores son los mismos como se muestran en la parte 1: Los factores de momentos de empotramiento son $m_{AB} = 0.069$ y $m_{BA} = 0.115$, y los momentos de empotramiento son $M_{FAB} = 202.86$ kN-m y $M_{FBA} = 338.10$ kN-m. Los factores de transporte son $C_{AB} = 0.656$ y $C_{BA} = 0.468$. Los factores de rigidez son: $k_{AB} = 4.31$ y $k_{BA} = 6.05$, y las rigideces absolutas son: $K_{AB} = 4.31EI/L$ y $K_{BA} = 6.05EI/L$.

Los datos de la trave B-C son: Para la carga muerta (carga uniformemente distribuida), todos los factores son los mismos como se muestran en la parte 1: Los factores de momentos de empotramiento son $m_{BC} = 0.098$ y $m_{CB} = 0.098$, y los momentos de empotramiento son $M_{FBC} = 288.12$ kN-m y $M_{FCB} = 288.12$ kN-m. Los factores de transporte son $C_{BC} = 0.626$ y $C_{CB} = 0.626$. Los factores de rigidez son: $k_{BC} = 6.93$ y $k_{CB} = 6.93$, y las rigideces absolutas son: $K_{BC} = 6.93EI/L$ y $K_{CB} = 6.93EI/L$. Ahora, los datos para la carga viva (carga concentrada) son: $a = 3.50$ m; $c = 3.50$ m; $h = 1.40$ m; $u = 1.40$ m; $s = 1.40$ m; $L = 14.00$ m; $P_1 = 35$ kN ubicada en $e = 1.97$ m ($\tau = 0.14$); $P_2 = 145$ kN localizada en $e = 6.27$ m ($\tau = 0.45$); $P_3 = 145$ kN ubicada en $e = 10.57$ m ($\tau = 0.76$). Ahora, para aplicar las ayudas de diseño se usan los siguientes valores: $a = 0.25L$; $c = 0.25L$; $\zeta = u/h = 1.00$; $P_1 = 35$ kN y $\tau = 0.14$; $P_2 = 145$ kN y $\tau = 0.45$; $P_3 = 145$ kN y $\tau = 0.76$.

La gráfica que se muestra en la Figura 3(b) para $a = 0.2L$ ($\lambda = 0.2$) y $c = 0.2L$ ($\kappa = 0.2$), y en la Figura 4(b) para $a = 0.3L$ ($\lambda = 0.3$) y $c = 0.3L$ ($\kappa = 0.3$) se utilizan para obtener los factores por interpolación.

Para $P_1 = 35 \text{ kN}$ y $\tau = 0.14$ con $a = 0.2L$ y $c = 0.2L$, los factores son: $m_{BC} = 0.123$ y $m_{CB} = 0.011$, y con $a = 0.3L$ y $c = 0.3L$, los factores son: $m_{BC} = 0.122$ y $m_{CB} = 0.012$. Los factores de momentos de empotramiento en ambos extremos por interpolación para $a = 0.25L$ y $c = 0.25L$ son $m_{BC} = 0.1225$ y $m_{CB} = 0.0115$, y los momentos de empotramiento son $M_{FBC} = 60.02 \text{ kN-m}$ y $M_{FCB} = 5.64 \text{ kN-m}$.

Para $P_2 = 145 \text{ kN}$ y $\tau = 0.45$ con $a = 0.2L$ y $c = 0.2L$, los factores son: $m_{BC} = 0.163$ y $m_{CB} = 0.126$, y con $a = 0.3L$ y $c = 0.3L$, los factores son: $m_{BC} = 0.173$ y $m_{CB} = 0.132$. Los factores de momentos de empotramiento en ambos extremos por interpolación para $a = 0.25L$ y $c = 0.25L$ son $m_{BC} = 0.168$ y $m_{CB} = 0.129$, y los momentos de empotramiento son $M_{FBC} = 341.04 \text{ kN-m}$ y $M_{FCB} = 261.87 \text{ kN-m}$.

Para $P_3 = 145 \text{ kN}$ y $\tau = 0.76$ con $a = 0.2L$ y $c = 0.2L$, los factores son: $m_{BC} = 0.038$ y $m_{CB} = 0.172$, y con $a = 0.3L$ y $c = 0.3L$, los factores son: $m_{BC} = 0.037$ y $m_{CB} = 0.179$. Los factores de momentos de empotramiento en ambos extremos por interpolación para $a = 0.25L$ y $c = 0.25L$ son $m_{BC} = 0.0375$ y $m_{CB} = 0.1755$, y los momentos de empotramiento son $M_{FBC} = 76.12 \text{ kN-m}$ y $M_{FCB} = 356.26 \text{ kN-m}$.

Los momentos de empotramiento totales para la carga viva son: $M_{FBC} = 477.18 \text{ kN-m}$ y $M_{FCB} = 623.77 \text{ kN-m}$. Ahora, los momentos de empotramiento de carga muerta más carga viva son: $M_{FBC} = 765.30 \text{ kN-m}$ y $M_{FCB} = 911.89 \text{ kN-m}$.

Los datos de la trabe C-D son: Para la carga muerta (carga uniformemente distribuida), todos los factores son los mismos como se muestran en la parte 1: Los factores de momentos de empotramiento son: $m_{CD} = 0.115$ y $m_{DC} = 0.069$, y los momentos de empotramiento son: $M_{FCD} = 338.10 \text{ kN-m}$ y $M_{FDC} = 202.86 \text{ kN-m}$. Los factores de transporte son: $C_{CD} = 0.468$ y $C_{DC} = 0.656$. Los factores de rigidez son: $k_{CD} = 6.05$ y $k_{DC} = 4.31$, y las rigideces absolutas son: $K_{CD} = 6.05EI/L$ y $K_{DC} = 4.31EI/L$.

Las matrices de rigidez para cada trabe de la parte 1 son:

$$K_{AB} = \begin{bmatrix} 4.31 & 2.83 \\ 2.83 & 6.05 \end{bmatrix} \frac{EI}{L},$$

$$K_{BC} = \begin{bmatrix} 6.93 & 4.55 \\ 4.55 & 6.93 \end{bmatrix} \frac{EI}{L},$$

$$K_{CD} = \begin{bmatrix} 6.05 & 2.83 \\ 2.83 & 4.31 \end{bmatrix} \frac{EI}{L}.$$

La matriz general de rigidez "K_G" de la parte 1 es:

$$K_G = \begin{bmatrix} 4.31 & 2.83 & 0 & 0 \\ 2.83 & 12.98 & 4.55 & 0 \\ 0 & 4.55 & 12.98 & 2.83 \\ 0 & 0 & 2.83 & 4.31 \end{bmatrix} \frac{EI}{L}.$$

Los momentos de empotramiento para las trabes (etapa 1) son:

$$\begin{bmatrix} M_{AB} \\ M_{BA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +202.86 \\ -338.10 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} M_{BC} \\ M_{CB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +765.30 \\ -911.89 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} M_{CD} \\ M_{DC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +338.10 \\ -202.86 \end{bmatrix}.$$

El vector de los momentos efectivos que actúan sobre la trabe continua es:

$$\begin{bmatrix} M_A \\ M_B \\ M_C \\ M_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -202.86 \\ +338.10 - 765.30 \\ +911.89 - 338.10 \\ +202.86 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -202.86 \\ -427.20 \\ +573.79 \\ +202.86 \end{bmatrix}.$$

La ecuación de Fuerza-desplazamiento es:

$$[P] = [K][d],$$

donde: $[P]$ es el vector de los momentos efectivos que actúan sobre la trabe continua, $[K]$ es la matriz general de rigidez, $[d]$ es el vector de desplazamientos o rotaciones.

$$\begin{bmatrix} -202.86 \\ -427.20 \\ +573.79 \\ +202.86 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.31 & 2.83 & 0 & 0 \\ 2.83 & 12.98 & 4.55 & 0 \\ 0 & 4.55 & 12.98 & 2.83 \\ 0 & 0 & 2.83 & 4.31 \end{bmatrix} \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \theta_C \\ \theta_D \end{bmatrix}.$$

La solución del sistema es:

$$\begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \theta_C \\ \theta_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13.4404 \\ -51.2127 \\ +60.5665 \\ +7.2986 \end{bmatrix} \frac{L}{EI}.$$

Los momentos de empotramiento para las traves (etapa 2) son:

$$\begin{bmatrix} M_{AB} \\ M_{BA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^{AB} & k_{12}^{AB} \\ k_{21}^{AB} & k_{22}^{AB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} M_{AB} \\ M_{BA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.31 & 2.83 \\ 2.83 & 6.05 \end{bmatrix} \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} -13.4404 \\ -51.2127 \end{bmatrix} \frac{L}{EI} = \begin{bmatrix} -202.86 \\ -347.87 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} M_{BC} \\ M_{CB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^{BC} & k_{12}^{BC} \\ k_{21}^{BC} & k_{22}^{BC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} M_{BC} \\ M_{CB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.93 & 4.55 \\ 4.55 & 6.93 \end{bmatrix} \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} -51.2127 \\ +60.5665 \end{bmatrix} \frac{L}{EI} = \begin{bmatrix} -79.33 \\ +186.71 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} M_{CD} \\ M_{DC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^{CD} & k_{12}^{CD} \\ k_{21}^{CD} & k_{22}^{CD} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_C \\ \theta_D \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} M_{CD} \\ M_{DC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.05 & 2.83 \\ 2.83 & 4.31 \end{bmatrix} \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} +60.5665 \\ +7.2986 \end{bmatrix} \frac{L}{EI} = \begin{bmatrix} +387.08 \\ +202.86 \end{bmatrix}.$$

Los momentos que resultan de la suma de la etapa 1 y 2 (momentos finales que actúan sobre los extremos de cada trave) son:

$$\begin{bmatrix} M_{AB} \\ M_{BA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +202.86 \\ -338.10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -202.86 \\ -347.87 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -685.97 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} M_{BC} \\ M_{CB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +765.30 \\ -911.89 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -79.33 \\ +186.71 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +685.97 \\ -725.18 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} M_{CD} \\ M_{DC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +338.10 \\ -202.86 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +387.08 \\ +202.86 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +725.18 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, estos momentos finales son los momentos para el diseño de las traves.

4. Resultados

Las Figuras 1 a 6 (ver Apéndice) muestran los factores de momentos de empotramiento (m_{AB} y m_{BA}) en función de " τ " (posición de la carga concentrada " P " a partir del apoyo A de la trave).

La Figura 1 muestra las gráficas para los factores de momentos de empotramiento (m_{AB} y m_{BA}) sometida a una carga concentrada para $c = 0.0L$. Las gráficas muestran lo siguiente:

- 1.- El valor máximo para los factores de empotramiento " m_{AB} " se presenta en la Figura 1(d) ($\lambda = 0.6$, $\kappa = 0$, $\zeta = 2.00$ y $\tau = 0.46$) de 0.288.

- 2.- El valor máximo para los factores de empotramiento " m_{BA} " se presenta en la Figura 1(a) ($\lambda = 0.1$, $\kappa = 0$, $\zeta = 0.50$ y $\tau = 0.68$) de 0.143.

La Figura 2 muestra las gráficas para los factores de momentos de empotramiento (m_{AB} y m_{BA}) sometida a una carga concentrada para $0.1L$. Las gráficas muestran lo siguiente:

- 1.- El valor máximo para los factores de empotramiento " m_{AB} " se presenta en la Figura 2(d) ($\lambda = 0.6$, $\kappa = 0.1$, $\zeta = 2.00$ y $\tau = 0.43$) de 0.273.

- 2.- El valor máximo para los factores de empotramiento " m_{BA} " se presenta en la Figura 2(d) ($\lambda = 0.1$, $\kappa = 0.1$, $\zeta = 2.00$ y $\tau = 0.67$) de 0.174.

- 3.- Los factores de empotramiento (m_{AB} y m_{BA}) son iguales en la Figura 2 ($\lambda = 0.1$, $\kappa = 0.1$, $\zeta = 0.50, 1.00, 1.50, 2.00$ en $\tau = 0.50$). Esto es, porque la trave es simétrica en carga y en geometría, es decir, la carga concentrada se ubica en el centro de la trave.

La Figura 3 muestra las gráficas para los factores de momentos de empotramiento (m_{AB} y m_{BA}) sometida a una carga concentrada para $0.2L$. Las gráficas muestran lo siguiente:

- 1.- El valor máximo para los factores de empotramiento " m_{AB} " se presenta en la Figura 3(d) ($\lambda = 0.6$, $\kappa = 0.2$, $\zeta = 2.00$ y $\tau = 0.43$) de 0.257.

- 2.- El valor máximo para los factores de empotramiento " m_{BA} " se presenta en la Figura 3(d) ($\lambda = 0.1$, $\kappa = 0.2$, $\zeta = 2.00$ y $\tau = 0.67$) de 0.208.

- 3.- Los factores de empotramiento (m_{AB} y m_{BA}) son iguales en la Figura 3 ($\lambda = 0.2$, $\kappa = 0.2$, $\zeta = 0.50, 1.00, 1.50, 2.00$ en $\tau = 0.50$). Esto es, porque la trave es simétrica en carga y en geometría, es decir, la carga concentrada se ubica en el centro de la trave.

La Figura 4 muestra las gráficas para los factores de momentos de empotramiento (m_{AB} y m_{BA}) sometida a una carga concentrada para $0.3L$. Las gráficas muestran lo siguiente:

- 1.- El valor máximo para los factores de empotramiento " m_{AB} " se presenta en la Figura 4(d) ($\lambda = 0.6$, $\kappa = 0.3$, $\zeta = 2.00$ y $\tau = 0.40$) de 0.245.
- 2.- El valor máximo para los factores de empotramiento " m_{BA} " se presenta en la Figura 4(d) ($\lambda = 0.1$, $\kappa = 0.3$, $\zeta = 2.00$ y $\tau = 0.65$) de 0.236.
- 3.- Los factores de empotramiento (m_{AB} y m_{BA}) son iguales en la Figura 4 ($\lambda = 0.3$, $\kappa = 0.3$, $\zeta = 0.50, 1.00, 1.50, 2.00$ en $\tau = 0.50$). Esto es, porque la trabe es simétrica en carga y en geometría, es decir, la carga concentrada se ubica en el centro de la trabe.

La Figura 5 muestra las gráficas para los factores de momentos de empotramiento (m_{AB} y m_{BA}) sometida a una carga concentrada para 0.4L. Las gráficas muestran lo siguiente:

- 1.- El valor máximo para los factores de empotramiento " m_{AB} " se presenta en la Figura 5(d) ($\lambda = 0.5$, $\kappa = 0.4$, $\zeta = 2.00$ y $\tau = 0.37$) de 0.235.
- 2.- El valor máximo para los factores de empotramiento " m_{BA} " se presenta en la Figura 5(d) ($\lambda = 0.1$, $\kappa = 0.4$, $\zeta = 2.00$ y $\tau = 0.62$) de 0.258.
- 3.- Los factores de empotramiento (m_{AB} y m_{BA}) son iguales en la Figura 4 ($\lambda = 0.4$, $\kappa = 0.4$, $\zeta = 0.50, 1.00, 1.50, 2.00$ en $\tau = 0.50$). Esto es, porque la trabe es simétrica en carga y en geometría, es decir, la carga concentrada se ubica en el centro de la trabe.

La Figura 6 muestra las gráficas para los factores de momentos de empotramiento (m_{AB} y m_{BA}) sometida a una carga concentrada para 0.5L. Las gráficas muestran lo siguiente:

- 1.- El valor máximo para los factores de empotramiento " m_{AB} " se presenta en la Figura 6(d) ($\lambda = 0.5$, $\kappa = 0.5$, $\zeta = 2.00$ y $\tau = 0.36$) de 0.228.
- 2.- El valor máximo para los factores de empotramiento " m_{BA} " se presenta en la Figura 6(d) ($\lambda = 0.1$, $\kappa = 0.5$, $\zeta = 2.00$ y $\tau = 0.58$) de 0.270.

- 3.- Los factores de empotramiento (m_{AB} y m_{BA}) son iguales en la Figura 6 ($\lambda = 0.5$, $\kappa = 0.5$, $\zeta = 0.50, 1.00, 1.50, 2.00$ en $\tau = 0.50$). Esto es, porque la trabe es simétrica en carga y en geometría, es decir, la carga concentrada se ubica en el centro de la trabe.

Ahora, los factores para momentos de empotramiento del ejemplo numérico por ayudas de diseño se comparó con las ecuaciones de Sandoval-Rivas *et al.* [25]. Estos valores son los mismos con una aproximación de 3 dígitos. Por lo tanto, el grado de rapidez para obtener estos factores por medio de las ayudas de diseño no se compara con las ecuaciones, porque las 6 ecuaciones son muy complejas y se debe de usar algún software para obtener los valores.

5. Conclusiones

Este trabajo muestra las ayudas de diseño más utilizadas para trabes de sección transversal rectangular con cartelas parabólicas con altura variable en los extremos de la trabe sometidas a una carga concentrada localizada en cualquier parte de la longitud de la trabe que toma en cuenta las deformaciones por flexión y cortante para obtener los factores de momentos de empotramiento.

Los coeficientes de momentos de empotramiento (m_{AB} y m_{BA}) toman en cuenta $u = s = \zeta h$ ($\zeta = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$); $a = \lambda L$ ($\lambda = 0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0$); $c = \kappa L$ ($\kappa = 0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$); $h = 0.1L$; $\tau = e/L$ ($\tau = 0$ a 1); $\nu = 0.20$ para concreto. Para $c = 0L$ se considera $u = \zeta h$; $s = 0$.

Los coeficientes para momentos de empotramiento (ayudas de diseño) presentadas en este trabajo son precisas, eficientes y reducen el problema para diseñar una trabe de sección transversal rectangular con cartelas parabólicas en sus extremos.

El propósito de este documento es brindar a los ingenieros en el ejercicio profesional, alguna forma de reducir el tiempo de diseño requerido para los proyectos, sin dejar de cumplir con el código ACI (American Concrete Institute) [26]. Aquí, la carga concentrada podría ser la carga

rodante para puentes carreteros y ferroviarios (carga viva).

Un ejemplo numérico se presenta para demostrar la validez, la aplicabilidad, la sencillez y efectividad de las ayudas de diseño propuestas en el análisis de traves de sección transversal rectangular con cartelas parabólicas sometidas a una carga concentrada localizada en cualquier parte de la trabe.

Los estudios futuros se pueden realizar sobre los coeficientes de traves para los siguientes casos: desarrollar las gráficas para los factores de momentos de empotramiento para una carga concentrada, para otras secciones transversales como "T" o "I", y para cartelas rectas o parabólicas.

Agradecimientos

La investigación descrita en este trabajo fue financiada por el Instituto de Investigaciones Multidisciplinarias de la Facultad de Contaduría y Administración de la Universidad Autónoma de Coahuila. Los autores también agradecen a los revisores y al editor por los comentarios y sugerencias para mejorar la presentación. El estudiante de Maestría Rosa Margarita Luévanos Soto (CVU: 1028583) agradece al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico.

References

1. **Guldan, R. (1956).** Estructuras aporricadas y vigas continuas. El ateneo.
2. **Portland Cement Association (1958).** Handbook of frame constants: Beam factors and moment coefficients for members of variable section. Portland Cement Association.
3. **Hibbeler, R.C. (2006).** Structural analysis. Prentice-Hall, Inc.
4. **Tena-Colunga, A. (2007).** Análisis de estructuras con métodos matriciales. Limusa.
5. **Gupta, M.M., Friel, L.L. (1977).** Design aids for cantilever retaining walls. Journal of the Structural Division, Vol. 103, No. 5, pp. 1113–1126.
6. **Park, D., Ahn, J., Lee, Ch. (1999).** Design aids for a reinforced concrete beam with minimum cost concept. Architectural Research, Vol. 1, No. 1, pp. 55–61.
7. **Chandrasekaran, S., Gupta, S.K., Carannante, F. (2009).** Design aids for fixed support reinforced concrete cylindrical shells under uniformly distributed loads. International Journal of Engineering, Science and Technology, Vol. 1, No. 1, pp. 148–171. DOI: 10.4314/ijest.v1i1.58074.
8. **Rodríguez-Gutiérrez, J.A., Aristizabal-Ochoa, J.D. (2013).** Rigid spread footings resting on soil subjected to axial load and biaxial bending II: Design aids. International Journal of Geomechanics, Vol. 13, No. 2, pp. 109–119. DOI: 10.1061/(ASCE)GM.1943-5622.0000210.
9. **Zofkie, R. (2012).** Design aids for determining deflection of beams reinforced along part of their length. Structures Congress'12, American Society of Civil Engineers. DOI: 10.1061/9780784412367.187.
10. **Sun, B.J., Lu, Z.T. (1992).** Design aids for reinforced concrete columns. Journal of Structural Engineering, Vol. 118, No. 11. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9445(1992)118:11(29 86).
11. **Taylor, A., Hamilton III, T., Nanni, A. (2015).** The reinforced concrete design Handbook: A companion to ACI 318-14. American Concrete Institute, Vol. 3.
12. **Hashmi, A.K. (2016).** Design aid for seismic strengthening of reinforced concrete beams. The Indian Concrete Journal, Vol. 90, No. 4, pp. 93–100.
13. **Varyani, U.H., Radhaji, A. (2005).** Design aids for limit state design of reinforced concrete members. Khanna Publishers.
14. **Mohammed, H.A. (2019).** Design aids for prestressed concrete double tee beam with web opening associated with the variation of its compressive strength. International Journal of Recent Technology and Engineering (IJRTE), Vol. 8, No. 3, pp. 8509-8520. DOI: 10.35940/ijrte.E1981.098319.
15. **Mishra, P., Gupta, M.K. (2019).** Design aids for beam-column design as per IS800: 2007. International Research Journal of Engineering and Technology (IRJET), Vol. 6, No. 6, pp. 2870–2876.
16. **Schultz, J.A., Jesse, J.D. (2020).** Simplified stress design of helicoidal HSS beams. Journal of Architectural Engineering, Vol. 26, No. 1. DOI: 10.1061/(ASCE)AE.1943-5568.0000381.
17. **Hashmi, A.K., Ibrahim, S.M., Jameel, M., Madan, A. (2018).** Development of analysis curves for reinforced concrete beam sections based on simple approach of mechanics. Indian Concrete Journal, Vol. 92, No. 6, pp. 57–63.

- 18. Luévanos-Rojas, A. (2015).** Modelado para vigas de sección transversal "I" sometidas a una carga uniformemente distribuida con cartelas rectas. *Ingeniería Mecánica Tecnología y Desarrollo*, Vol. 5, No. 2, pp. 281–292.
- 19. Luévanos-Soto, I., Luévanos-Rojas, A. (2017).** Modeling for fixed-end moments of I-sections with straight haunches under concentrated load. *Steel and Composite Structures*, Vol. 23, No. 5, pp. 597–610. DOI: 10.12989/scs.2017.23.5.597.
- 20. Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S., Medina-Elizondo, M. (2016).** Modeling for mechanical elements of rectangular members with straight haunches using software: Part 1. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, Vol. 12, No. 3, pp. 973–985. DOI: 10.24507/ijicic.12.03.959.
- 21. Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S., Medina-Elizondo, M. (2016).** Modeling for mechanical elements of rectangular members with straight haunches using software: Part 2. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, Vol. 12, No. 4, pp. 1027–1041. DOI: 10.24507/ijicic.12.04.1027.
- 22. Luévanos-Rojas, A. (2012).** A mathematical model for rectangular beams of variable cross section of symmetrical parabolic shape for uniformly distributed load. *Far East Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 80, No. 2, pp. 197–230.
- 23. Luévanos-Rojas, A. (2013).** Mechanical elements of rectangular nonprismatic members for symmetrical parabolic haunches subjected to a uniformly distributed load. *Journal Architectural Engineering Technology*, Vol. 2, No. 2, pp. 1–8.
- 24. Velázquez-Santillán, F., Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S., Medina-Elizondo, M. (2019).** Modelado para traves de sección transversal rectangular con cartelas parabólicas: Parte 1. *Computación y Sistemas*, Vol. 23, No. 2, pp. 557–568. DOI: 10.13053/CyS-23-2-2872.
- 25. Sandoval-Rivas, R., Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S., Medina-Elizondo, M. (2019).** Modelado para traves de sección transversal rectangular con cartelas parabólicas: Parte 2. *Computación y Sistemas*, Vol. 23, No. 3, pp. 1115–1124. DOI: 10.13053/CyS-23-3-2873.
- 26. ACI 318S-19 (American Concrete Institute) (2019).** Building code requirements for structural concrete, including the comments on the standards. Committee 318.
- 27. Aashto, L.R.F.D. (2014).** Bridge design specifications. American Association of State and Highway Transportation Officials.

*Article received on 09/10/2020; accepted on 01/07/2021.
Corresponding author is Arnulfo Luévanos Rojas.*