

# Filtro digital adaptivo integrado

María Teresa Zagaceta Álvarez<sup>1</sup> y José de Jesús Medel Juárez<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada (CICATA-Legaria), Instituto Politécnico Nacional, DF, México

<sup>2</sup> Centro de Investigación en Computación, Instituto Politécnico Nacional, DF, México

{mtza79, jjmedelj}@yahoo.com.mx

**Resumen.** En este documento se presenta el estudio de algunas técnicas de filtrado digital de señales para determinar cuál ofrece la mayor convergencia aplicada en sistemas lineales invariantes en el tiempo como: el método de mínimos cuadrados y el de gradiente estocástico, usando modelos ARMA (1) ("autoregressive moving average", modelos de primer orden estocásticos y descritos de manera recursiva). Se enfatiza en el análisis de las técnicas de filtrado adaptivo, desarrollando algoritmos que permiten identificar y estimar parámetros de manera integrada dentro de un sistema visto como caja negra de tal forma que sea posible conceptualizar su nivel de convergencia y mejorar los algoritmos que actualmente se utilizan en esta importante área que interviene tanto en visión artificial, como en sistemas de control complejos en los que se requiere de la predicción, descripción y reconstrucción de información. Los algoritmos presentados aquí se han desarrollado de manera analítica en base a la literatura citada y a las herramientas matemáticas necesarias, todos ellos simulados en Matlab.

**Palabras clave.** Filtro adaptivo, error funcional, gradiente estocástico, sistema de referencia.

## Integrated Digital Adaptive Filter

**Abstract.** This thesis presents a study of various techniques of digital signal filtering to determine which provides greater convergence when applied to time-invariant linear systems such as the least squares and the stochastic gradient method, using in all of them the

---

Resumen extendido de tesis doctoral. Graduada: María Teresa Zagaceta Álvarez. Director: José de Jesús Medel Juárez. Fecha de graduación: 16/12/2009.

Extended abstract of PhD thesis. Graduated: María Teresa Zagaceta Álvarez. Advisor: José de Jesús Medel Juárez. Graduation date: 16/12/2009.

ARMA (1) models (autoregressive moving average, first-order stochastic model). We have made emphasis in the analysis of adaptive filtering techniques to develop algorithms that allow us to identify and estimate parameters integrated within a system seen as a black box, in such a manner that it becomes possible to conceptualize their level of convergence and to improve algorithms that are currently used in this important area that is involved in both artificial vision and complex control systems, where information prediction, description and reconstruction are required. The algorithms presented here have been developed in an analytical manner on the basis of cited literature and the necessary mathematical tools. All of them were simulated using MathLab.

**Keywords.** Adaptive filter, functional error, stochastic gradient, reference system.

## 1 Introducción

El término filtrado adaptivo implica que los parámetros que caracterizan al proceso o sistema, tales como ancho de banda y frecuencias, cambian con el tiempo; esto es, los coeficientes, también llamados pesos de las inferencias o modelos, cambian temporalmente. La operación de un algoritmo de filtro adaptivo involucra dos procesos básicos:

- Proceso de filtrado, diseñado para producir una salida de acuerdo a un objetivo en específico, en respuesta a una secuencia de información de entrada.
- Proceso adaptivo, cuyo propósito es proveer un mecanismo de control que permita realizar los ajustes necesarios a la entrada o dentro

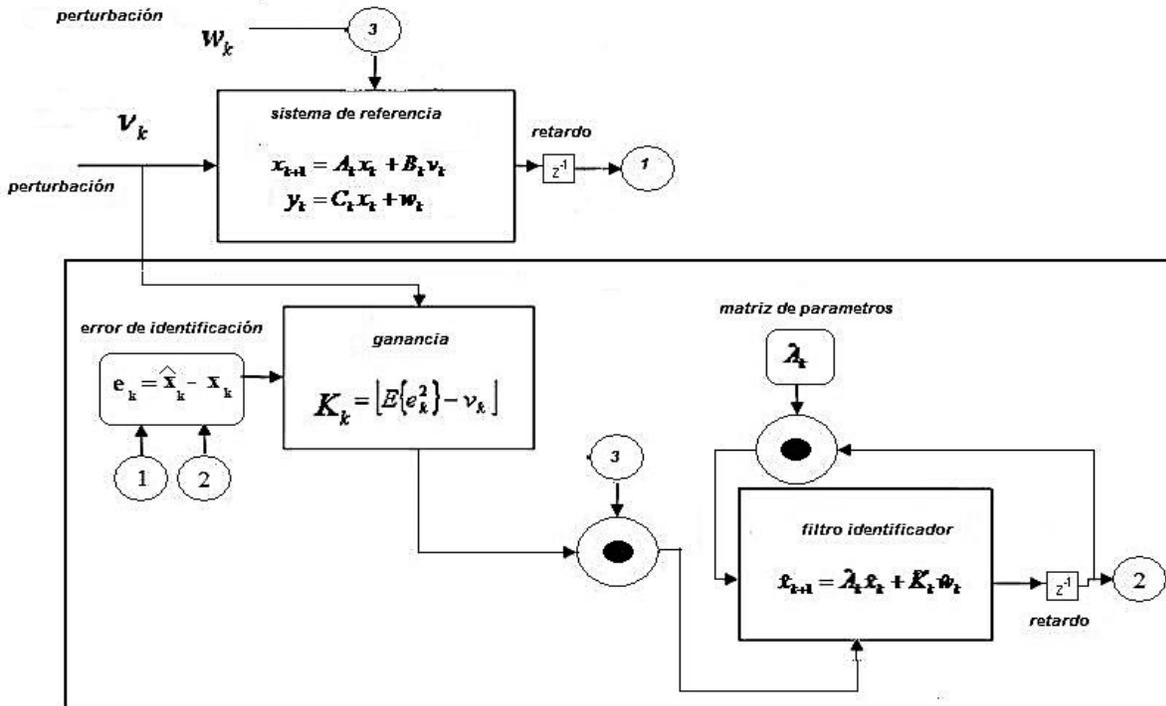


Fig. 1. Filtro Integrado (Estimación e Identificación)

del filtro para su sana operación, respecto de los cambios que sufre el sistema con su interacción en el medio ambiente en donde ella se encuentre interactuando.

En un ambiente estacionario, el algoritmo ofrece el rastrear variaciones de tiempo acotadas en sus primeros cuatro momentos de probabilidad de la información de entrada a condición de que las variaciones entre ellos sean lo suficientemente lentas. Actualmente se desarrollan y mejoran los algoritmos de filtrado adaptivo con dos procesos de forma separada como son:

- *Estimación:* Es el área del filtrado dedicada a la descripción de los parámetros internos del sistema a través de la información que él emite como respuesta a un estímulo predefinido.
- *Identificación:* Es el área del filtrado dedicada a descripción de los estados internos del

sistema través de la información que él emite como respuesta a un estímulo predefinido.

## 2 Antecedentes

De acuerdo con [1], dentro del filtrado adaptativo, frecuentemente son propuestas nuevas estructuras y nuevos algoritmos que buscan acelerar la convergencia y/o reducen drásticamente la complejidad computacional, especialmente en aplicaciones que requieren el uso de un gran número de coeficientes de adaptación. En este sentido las estructuras de filtrado adaptativo en subbandas han crecido por la posibilidad de hacer el filtrado y la adaptación a una menor frecuencia de muestreo de la señal de entrada. Recientemente se han propuesto nuevas estructuras de adaptación capaces de modelar con precisión cualquier sistema de respuesta de impulsos finitos. Las propiedades de estas dos estructuras son investigadas: Mientras la primera

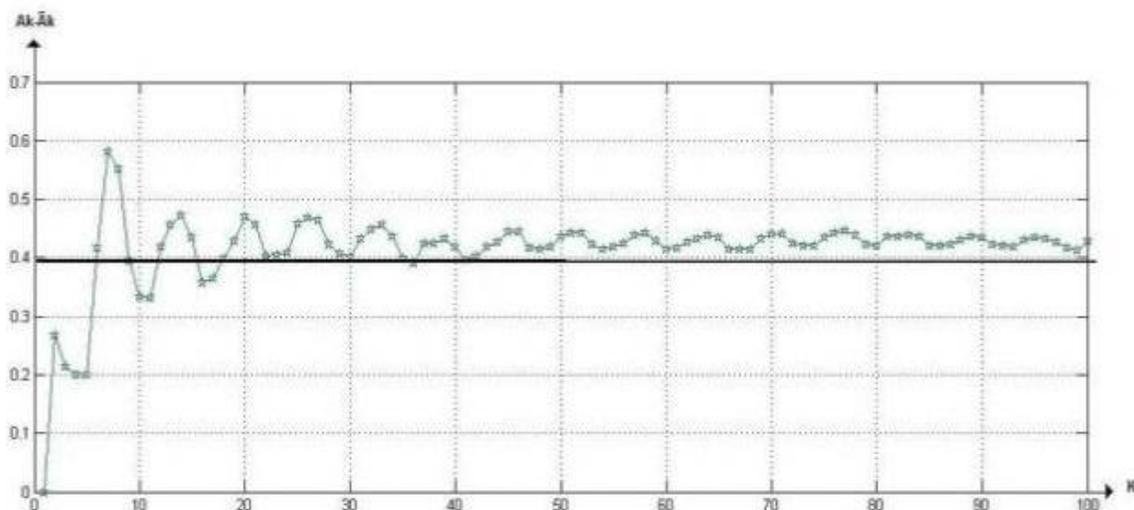


Fig. 2. Estimación óptima en relación con el parámetro de referencia

consiste en un análisis de los datos y los filtros sin haber cambio en la tasa de muestreo de las señales, en la segunda las señales de salida se analizan a partir de la base de datos con submuestras. Se proponen procedimientos de optimización a fin de seleccionar los coeficientes de los bancos de filtros como resultado una reducción del error cuadrado medio.

En [2] se presentan algunas aplicaciones del modelo autoregresivo y del algoritmo de Prony dentro del área de procesamiento digital de señales. Primeramente se presenta una descripción y un análisis de las estructuras de los modelos ARMA ( $p, q$ ), AR ( $p$ ) y MA ( $q$ ) [3], se establecen las relaciones básicas entre las autocorrelaciones y los parámetros del modelo y se exponen algunos métodos para la obtención de los parámetros autoregresivos. El filtro de Kalman apareció a principios de la década de los sesenta; su impacto en el procesamiento de señales es comparable a los trabajos realizados por Nyquist [4] y Bode, en la década de los veinte, y a los de Wiener [5] en los años treinta.

El filtro de Wiener está limitado a sistemas lineales, monovariantes, y estacionarios, mientras que el filtro de Kalman posibilita la identificación de sistemas multivariantes y no estacionarios.

Además, aunque el filtro de Wiener puede ser discretizado, con la introducción de errores que ello comporta, el filtro de Kalman fue desarrollado

directamente para sistemas muestreados, lo que permite de forma natural su implementación.

Como puede observarse en la figura 1, el filtro de identificación, requiere conocida o estimada la matriz de parámetros internos del sistema.

### 3 Integración del estimador e identificador de forma recursiva

El filtro identificador es una estructura utilizada para predecir, describir o reconstruir el estado interno del sistema de referencia, considerando que su respuesta es estable (en el sentido más simple: entradas acotadas, salidas acotadas) a la excitación con ruido acotado. En el diagrama de la figura 3 se observa el espacio de estados del sistema de referencia ARMA (1), donde es posible apreciar las entradas y perturbaciones que lo afectan [6].

#### 3.1 Estimación de parámetros por el gradiente estocástico

Se consideró un sistema descrito por el modelo estocástico de primer orden expresado en diferencias finitas como:

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k v_k; y_k = C_k x_k + w_k. \quad (1)$$

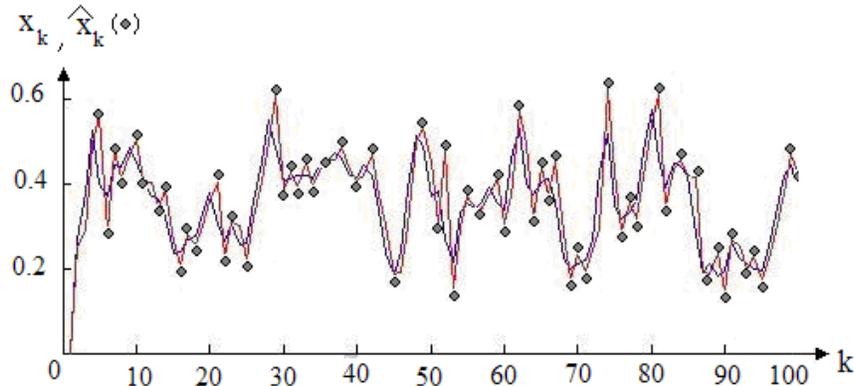


Fig. 3. Identificación de los estados internos ( $x_k$ )

Con un tiempo de evolución acotado  $\tau_k < \infty$  (por cada intervalo), que cumple con la condición de Nyquist [7],  $\tau_k = \frac{1}{2f_{\max k}}$ . En donde (1) está acotada en:  $N(\mu_w = k_w, \sigma_w^2 < \infty), k_w \in \mathfrak{R}_+$ .  $N(\mu_v = k_v, \sigma_v^2 < \infty), k_v \in \mathfrak{R}_+$ , Cumpliendo con  $x_k, x_{k+1}, y_k \in \mathfrak{R}_+^{[n \times 1], k}$ ; así como con los parámetros  $A_k, B_k, C_k \in \mathfrak{R}_+^{[n \times n], k}$ . Cuya respuesta se aproxima al comportamiento de un sistema ARMA (1). Lo cual permite hacer posible encontrar su estimador descrito en (2) a través de la esperanza matemática utilizando la técnica del gradiente estocástico.

$$\hat{A}_k = E\{y_{k-1} \hat{y}_k^T\} (E\{y_{k-1} \hat{y}_{k-1}^T\})^{-1} \quad (2)$$

Considerando al funcional del error de manera recursiva en (3) se tiene:

$$J_k = \frac{1}{k} (e_k e_k^T + (k-1) J_{k-1}) \quad (3)$$

Con error de identificación descrito en (4)

$$e_k = y_k - \hat{y}_k \quad (4)$$

### 3.2 Estimación de parámetros en forma recursiva

Considerando el modelo expresado en (2) y con las propiedades de invarianza, obtenemos su forma recursiva en (5)

$$\hat{A}_k = M_k \hat{A}_{k-1} + \tilde{Q}_k \quad (5)$$

De esta manera una vez que se obtiene la matriz de parámetros es posible realizar la identificación, ya que no se presupone conocida la matriz de transición; sino que ahora se encuentra estimada.

### 3.3 Identificación de estados internos caso SISO

Considerando el sistema descrito en (1), el identificador con innovación es (6)

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{A}_k \hat{x}_k + \tilde{K}_k \hat{w}_k \quad (6)$$

Con la matriz de ganancias descrita en (7)

$$K_k := \hat{A}_k J_k C_k^T [C_k J_k C_k^T + R_k]^{-1} \in \mathfrak{R}_+^{[n \times n], k}; \quad (7)$$

$$\hat{A}_k, C_k, J_k, R_k \in \mathfrak{R}_+^{[n \times n], k}$$

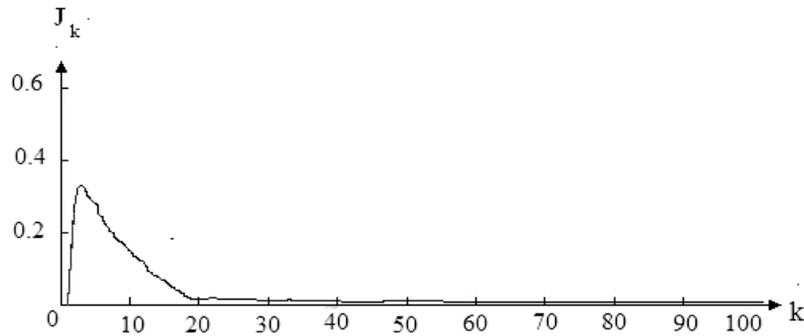


Fig. 4. Funcional de error ( $J_k$ )

Este es un identificador óptimo, en el sentido de probabilidad, respecto del funcional del error, que tiene la forma (8)

$$J_{k+1, \min} = \hat{A}_k J_k \hat{A}_k^T - \hat{K}_k C_k J_k \hat{A}_k^T + B_k Q_k B_k^T, \quad (8)$$

$$Q_k := E\{v_k v_k^T\}, \quad R_k := E\{w_k w_k^T\}$$

En base al modelo (1) se encontró el estimador (5) utilizado para la identificación del estado interno.

#### 4 Simulación del filtro integrado

Se utilizó el estimador para graficar diferentes amplitudes desde 0.1 hasta 0.9 observando, que a una varianza de 0.6 el estimador tiene una mejor convergencia que el resto de las estimaciones realizadas, la cual es descrita en la figura 2. El resultado visto en la figura 2, es sustituido en el identificador seleccionado; lo que permite obtener el resultado de identificación mostrado en la figura 3, con un funcional de error ( $J_k$ ) que converge a una región estacionaria como se observa en la figura 4.

Con un funcional de error ( $J_k$ ) que converge a una región estacionaria como se observa en la figura 4.

#### 5 Conclusiones

Este trabajo es un punto clave dentro de la teoría de filtrado digital, ya que hasta el momento, no se

han desarrollado algoritmo integrados que permitan conocer la dinámica interna del sistema basados en el concepto de caja negra y a la vez estimar sus parámetros, todo este de forma recursiva. Este algoritmo puede ser aplicado a cualquier área del saber humano ya que se desarrolló de forma general. El hecho de brindar en un solo algoritmo el proceso de estimación e identificación al funcional del error, al proceso de innovación y al estimador. Se logro desarrollar el filtro adaptivo formado por un estimador de parámetros unido con un identificador de estados, utilizando un modelo de referencia de primer orden estocástico, invariante en el tiempo, el cual fue descrito en diferencias finitas, con un tiempo de evolución entre estados acotado. La metodología propuesta dentro del proceso de filtrado consistió en tener una señal de referencia para realizar la estimación de la matriz de parámetros internos, con base en la cual se realizó la identificación del vector de los estados internos.

#### Referencias

1. **Ramírez-González, A. & Fernández-Rubio, J.A. (2003).** Estudio y Modelado de Errores en Sistemas Inerciales para Navegación Terrestre. *XVIII Simposium Nacional de la Unión Científica Internacional de Radio (URSI 2003)* La Coruña, España, 1–4. Retrieved from: [http://w3.iec.csic.es/ursi/articulos\\_modernos/articulo\\_s\\_coruna\\_2003/actas\\_pdf/SESION%202/S2.%20Aul](http://w3.iec.csic.es/ursi/articulos_modernos/articulo_s_coruna_2003/actas_pdf/SESION%202/S2.%20Aul)

a%202.5/1620%20-  
%20ESTUDIO%20Y%20MODELADO.pdf.

2. **Benchaib, A., Tadjine, M., & Rachid, A. (1999).** Sliding mode control of an induction motor with unknown load: application on a digital-signal-processor-based system. *International Journal of Systems Science*, 30(8), 849–863.
3. **Medel, J.J. (2002).** Análisis de Dos Métodos de Estimación para Sistemas Lineales Estacionares e Invariantes en el Tiempo con Perturbaciones Correlacionadas con el Estado Observable del Tipo: Una Entrada una Salida. *Computación y Sistemas*, 5(3), 215–222. Retrieved from: <http://www.cic.ipn.mx/portals/CIC/s11/vol05-03/CYS05305.pdf>.
4. **Vega, L.R., Tressens, S., & Rey, H. (2006).** Adaptive filtering using projection onto convex sets. *Latin American applied research*, 36(2), 123–127.
5. **Julier, S.J. & Uhlmann, J.K. (1997).** A New Extension of the Kalman Filter to Nonlinear Systems. 11<sup>th</sup> *International Symposium on Aerospace/Defence Sensing, Simulation and Controls*, Orlando, FL, USA. Retrieved from: <http://www.cs.berkeley.edu/~pabbeel/cs287-fa09/readings/JulierUhlmann-UKF.pdf>.
6. **Cramér, H. & Leadbetter, M.R. (1967).** *Stationary and related Stochastic Process: Sample function properties and theirs applications*, New York: Wiley.
7. **Zagaceta, M.T. & Medel, J.J. (2009).** Identification first order stochastic system with estimation parameters: recursive description. 8<sup>th</sup> *WSEAS International Conference on Signal Processing, Robotics and Automation*, Cambridge, UK, 299–303.



### **María Teresa Zagaceta**

**Álvarez** es Egresada del programa de Doctorado en Tecnología Avanzada (2009) desarrollando el tema de filtrado digital adaptivo, obtuvo el grado de Maestra en Tecnología Avanzada (2006) ambos cursados en el Centro de

Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, unidad Legaria; egresada de la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica Eléctrica-UPA como Ingeniera en Robótica industrial (2003). Participación en congresos

Nacionales e internacional con arbitraje y publicación en extenso.



### **José de Jesús Medel**

**Juárez** es Doctor (1998) y Maestro en Ciencias (1996) en Ingeniería Eléctrica (Control Automático) egresado del Centro de Investigación y Estudios Avanzados, es Ingeniero Aeronáutico (1994) egresado de la Escuela Superior de Ingeniería

Mecánica y Eléctrica, todos del Instituto Politécnico Nacional en México. Actualmente es Miembro de la Academia Mexicana de Ciencias, profesor Investigador del Centro de Investigación en Computación y Profesor Invitado del Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. Entre sus publicaciones destacan dos libros, una decena y media de artículos en revistas con arbitraje estricto (ISI, IEEE y CONACyT), cerca de cincuenta artículos en extenso presentados en congresos nacionales e internacionales y diversas publicaciones de divulgación científica; ha dirigido varias tesis de doctorado, maestría y licenciatura y diversos proyectos de investigación.

*Artículo recibido el 10/02/2010; aceptado el 04/10/2011.*