

Cuantificación del Error en las Mediciones Debido a la Frecuencia de Muestreo

The Error's Quantification in the Measurements Due to Sampling Frequency

¹ Luis Pastor Sánchez F. Juan Luis Díaz de León, Cornelio Yáñez M. y ² Roberto Herrera Charles

¹ Centro de Investigación en Computación, CIC-IPN

² CITEDI – IPN

{lsanchez, jdiaz, cyanez}@cic.ipn.mx

Artículo recibido en Marzo 15, 2004; aceptado en Agosto 9, 2004

Resumen

En los sistemas de medición digital es relevante la frecuencia de muestreo por su influencia en la exactitud de las mediciones. Su efecto es determinante cuando resulta necesario obtener los valores pico de la señal. Los métodos para mejorar la calidad del registro de datos adquiridos están relacionados con la operación del sistema en tiempo real o si es admitido realizar una toma de muestras y luego realizar su procesamiento. En el artículo se obtiene la relación entre la frecuencia de muestreo y el error máximo en la medición de una señal continua y sinusoidal, lo cual puede ser extendido para señales donde son relevantes uno o varios armónicos fundamentales. Mediante un procedimiento analítico se obtienen las expresiones matemáticas y se determina el error máximo en la medición de los valores picos. Se utilizan datos experimentales para establecer la relación entre la frecuencia de muestreo y exactitud en mediciones computarizadas de oleaje en laboratorios. Los datos son procesados mediante la inserción de puntos en la serie temporal manteniendo la compatibilidad con su vector complejo en el dominio de la frecuencia y se utiliza además, una corrección cúbica (interpolación de “splines” cúbicos). Se analizan sus efectos en la reducción del error debido a la frecuencia de muestreo y se recomiendan los valores apropiados de este parámetro.

Palabras Claves: Muestreo, Adquisición de Datos, Error, Exactitud, Interpolación, Oleaje, medición.

Abstract

The sampling frequency is essential by their influence in the measurement's accuracy. Their effect is decisive when it is necessary to obtain the signal pick values. The methods to improve the quality of the acquired data are related with system operation in real time or if it is admitted to carry out samples taking and later on the data analysis. This paper presents the mathematical expressions of maximum error in measuring the peak values of a continuous and sinusoidal signal according to the sampling frequency. Such expressions can be applied in signals where one or several main harmonics are relevant. This paper also shows the relationship between the sampling frequency and the accuracy of statistical calculations, used by peak values, with experimental data of the water level in wave generation laboratories. It is interpolated by using Fourier Fast Transform (FFT) and cubic splines. Both methods are compared in programming and signal analysis environments, where they are available, like the LabVIEW and the MATLAB.

Keywords: Sampling, Acquisition of Data, Error, Accuracy, Interpolation, Surf, Measurement.

1 Introducción

En la actualidad el uso masivo de medios computarizados en los sistemas de medición, procesamiento y control, impone nuevos estudios e investigaciones sobre los principales factores que influyen en la calidad de los mismos y en las particularidades de los análisis que se realizan con la información adquirida, por ejemplo en Hidráulica Marítima (Stansell, 2002). Uno de estos factores es la frecuencia de muestreo. La intención del trabajo que se presenta es su utilidad académica e investigativa, así como su valor práctico dado por las siguientes razones:

1. Permite calcular, mediante expresiones matemáticas, el error máximo en las mediciones computarizadas de armónicos de una señal, debido a la frecuencia de muestreo y por tanto poder calcular el error máximo total de las mediciones, en el cual hay que considerar la influencia apreciable de la exactitud del sensor sobre el cual no se puede actuar y el error de cuantificación del conversor análogo/digital (puede ser reducido a valores despreciables con conversores A/D de 12 y 16 bits).

2. Permite seleccionar una frecuencia de muestreo que no represente una carga intensa para el sistema de adquisición de datos, sólo la estrictamente necesaria pues es una tarea periódica y puede estar programada sobre un sistema operativo que no tiene que ser necesariamente un sistema operativo de tiempo real, pudiendo ser Windows o LINUX, como ocurre en la actualidad cuando se trabaja con computadoras personales -es una tendencia actual en los sistemas de medición computarizados a nivel de laboratorio (National Instruments, 2002) lo que implica hacer un uso eficiente y racional del procesador central de la PC. En este punto lo esencial es ocupar de forma mínima el procesador central de la PC, de lo contrario sería necesario usar un hardware adicional, como una tarjeta de adquisición de datos inteligente (con procesador y sistema operativo propios) o dispositivos que permitan estructurar un sistema distribuido, lo cual encarece y hace más complejo el sistema.

Es evidente que resulta importante planear y programar correctamente dicho sistema, por ejemplo para cada variable que se necesite medir seleccionar una frecuencia de muestreo correcta, ni baja ni extremadamente alta.

En muchas aplicaciones resulta útil reducir “adecuadamente” la frecuencia de muestreo para almacenar y transmitir la información y luego interpolar en el receptor, lo que significaría haber usado una frecuencia de muestreo equivalente superior (Oppenheim et al., 2000).

El teorema del muestreo de Shannon (Aström y Wittenmark, 1990; Ogata, 1998) establece la frecuencia angular de muestreo (ω_m) mínima para reconstruir una señal continua $X(t)$ a partir de las muestras tomadas en períodos de tiempo T , denotando a $X^*(t)$ como la señal $X(t)$ digitalizada.

Considerando que:

$$\omega_m = 2\pi / T$$

Donde:

ω_m : frecuencia de muestro en radianes por segundos.

T : período de muestreo en segundos.

Para una señal sinusoidal:

$$X(t) = A \sin(\omega_s t)$$

Siendo ω_s la frecuencia angular de la señal $X(t)$. Si ω_m es mayor o igual que $2\omega_s$ entonces la señal continua en el tiempo $X(t)$ puede ser reconstruida a partir de las muestras tomadas por un dispositivo digital, tal como un sistema de adquisición de datos que utilice un conversor analógico/digital y una computadora personal, como muestra en la Fig. 1. a).

Para una señal no sinusoidal, formada por numerosos armónicos, como es el caso de una señal de oleaje irregular, la frecuencia de muestreo tendría que ser mayor o igual que el doble de la mayor frecuencia de interés en el espectro de la señal que se está midiendo a través de sus muestras adquiridas en períodos de tiempo T . Poder reconstruir la señal continua a través de sus muestras no asegura la exactitud de esta reconstrucción. Se han utilizados criterios prácticos relacionados con el tipo de aplicaciones. Por ejemplo para los sistemas de control (Aström y Wittenmark, 1990) la frecuencia de muestreo debe estar basada en el conocimiento de su influencia en el funcionamiento del mismo, siendo razonable considerar que la mayor frecuencia de interés debe estar estrechamente relacionada con el ancho de banda del sistema de control de lazo cerrado. La selección, por tanto, de dicha frecuencia de muestreo debe tener sus bases en el ancho de banda o en el tiempo de subida del sistema de control de lazo cerrado. Es aceptable, tomarla entre seis a diez veces el ancho de banda o escoger el período de muestreo entre dos y tres veces más pequeño que el tiempo de subida, todo lo cual puede ser pequeño en relación con los criterios a seguir en las aplicaciones típicas de procesamiento de señales. La frecuencia de muestreo relativamente baja, en los sistemas de control, es producto de que su dinámica tiene características de filtros pasa bajas y sus constantes de tiempo típicas son mucho más grandes que el tiempo de respuesta de lazo cerrado.

Teniendo en cuenta el procesamiento primario establecido para mejorar la exactitud y el destino de la información recolectada, existen otros criterios prácticos, como es por ejemplo, considerar la frecuencia pico (F_p) del espectro de la señal y tomar la frecuencia de muestreo (F_m) de acuerdo a la relación siguiente: $F_m \geq 8F_p$, este criterio aparece recomendado para sistemas de medición y generación de oleaje irregular en laboratorios de investigación (Beresford, 1994; Bowers, 1988), o tomar el período de muestreo entre un décimo a una vigésima parte del período de la ola significativa (Goda, 2000).

Aquí se ha utilizado la notación F_m para la frecuencia de muestreo en Hertz (Hz), equivalentes a ciclos por segundos o a muestras por segundos.

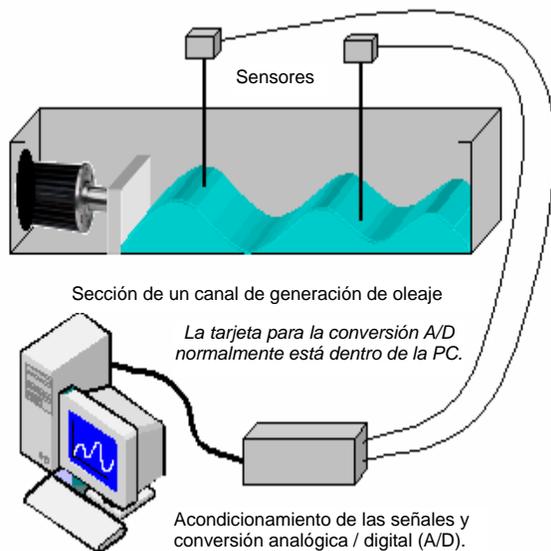
En todos los casos son criterios prácticos que han asegurado una exactitud adecuada dependiendo de las aplicaciones, pero no se han planteado relaciones matemáticas que permitan establecer de forma precisa el error máximo que puede producirse debido a la frecuencia de muestreo, lo que resulta importante cuando es necesario calcular el error de un sistema de medición, en el cual influyen todos los elementos que intervienen en el mismo, desde el dispositivo primario de medición de la variable continua hasta el conversor análogo-digital y la frecuencia con la cual se tomen las muestras, como se presenta de forma simplificada en la Fig. 1 a).

2 Sistema de Generación de Oleaje Irregular Unidireccional en Laboratorio

Para el análisis y aplicación de los resultados de la cuantificación del error en las mediciones debido a la frecuencia de muestreo, se está utilizando un sistema, en desarrollo, de control neuronal para la generación de oleaje irregular utilizando un motor lineal.

El oleaje es el fenómeno que tiene mayor impacto en la hidráulica marítima, de ahí el interés de contar con las facilidades de estudiar, medir y simular el oleaje, con el objetivo de conocer su impacto en las estructuras, playas y costas. La modelación a escala permite predecir con alto grado de certidumbre los fenómenos hidráulicos de las costas, pero ello requiere que los equipos para generar y los instrumentos para medir el oleaje tengan alta precisión. La mayoría de estos sistemas tienen poca automatización, por lo que los investigadores emplean un amplio porcentaje de su tiempo en calibrar sus modelos y prototipos, hasta que ajustan el experimento a simular con un nivel de error aceptable al compararlo con los datos que obtuvieron en campo. En la actualidad, resulta posible contar con instrumentos y sistemas que permiten resolver este tipo de problemas, utilizando técnicas avanzadas de control e inteligencia artificial.

En la Fig. 1 b) se presenta una sección de un generador de oleaje irregular mediante un motor lineal, en la Fig. 1 c) se puede observar una muestra del oleaje generado y en la Fig. 1 d) está el panel de control con gráficas en el tiempo de oleaje irregular y su espectro.



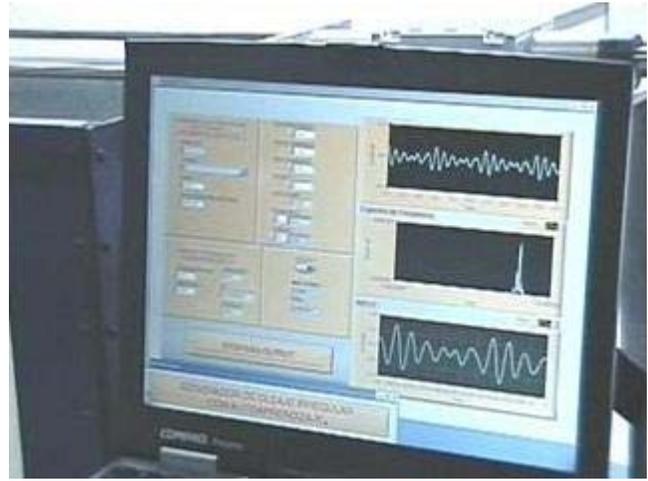
a) Esquema



b) Generador de oleaje mediante un motor lineal.



c) Oleaje generado



d) Panel de control. Oleaje irregular y espectro

Fig. 1. Medición de oleaje: a, b, c y d

2.1 Servomecanismo para el control del motor lineal, utilizado en el generador de oleaje irregular unidireccional

El principio básico es controlar la corriente para determinar el momento en función de la velocidad angular y con ello controlar su velocidad. Se utiliza el esquema de control de la Fig. 2 el cual permite comandar la posición deseada del motor mediante las curvas almacenadas en la memoria del manejador.

El procedimiento de control está dado para determinar la velocidad deseada con respecto a las secuencias de posiciones, es decir derivar contra el tiempo las posiciones. Esto determina una velocidad y una posición deseada lo que implica una corriente determinada; el valor de la corriente fija un momento el cual se aplica al comando del motor a través de la modulación PWM (modulación de ancho de pulso).

La Fig. 3 contiene el esquema de control de lazo cerrado utilizado en la generación de oleaje irregular.

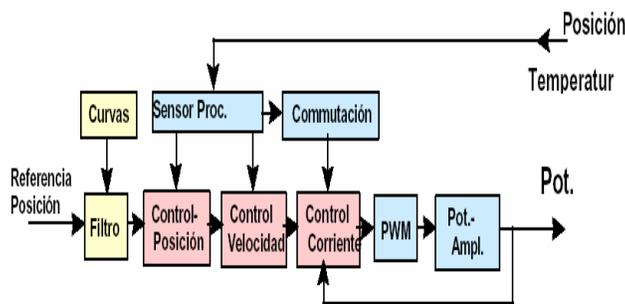


Fig. 2. Esquema del servo control para el motor lineal Linmot P01-37120

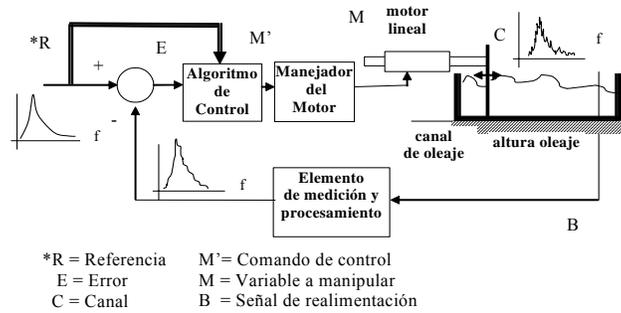


Fig. 3. Esquema de control de lazo cerrado para la generación de oleaje unidireccional

En la Fig. 4 se presenta el esquema de control neuronal por modelo de referencia.

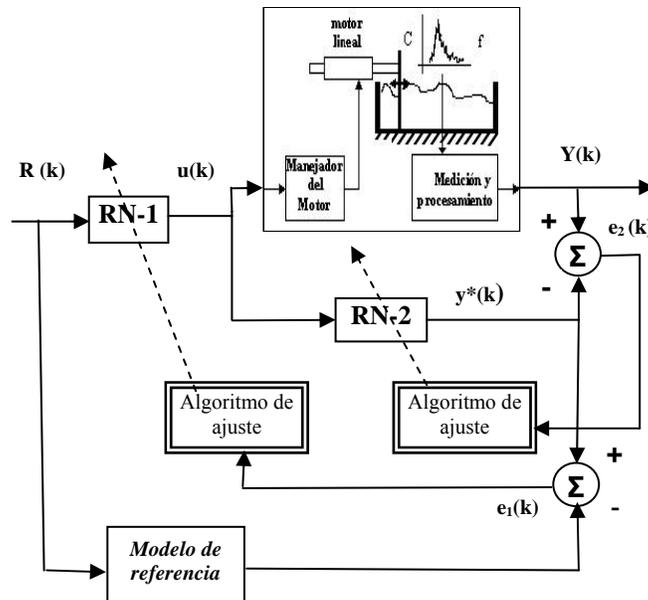


Fig. 4. Esquema de control por modelo de referencia, mediante redes neuronales

La arquitectura de la Fig. 4 presenta dos redes neuronales: una para identificación y la otra para control. La red neuronal que realiza la función de identificación (RN-2) es útil en el caso que exista ruido en la salida. Se tienen dos tipos de errores: el primero es el error de identificación; el segundo es el error en la salida. El error de identificación se utiliza para ajustar la red RN-2 y el error de la salida se utiliza para ajustar la red controladora RN-1.

Se están realizando las pruebas experimentales y la evaluación de esta arquitectura para el control de la generación de oleaje irregular unidireccional en un canal de sección rectangular de 12 m de longitud, 40 cm de profundidad y 30 cm de ancho. Está construido con una estructura metálica de aluminio y sólo en la parte donde se hacen las mediciones tiene paredes de mica transparente. El final del canal tiene un dissipador de oleaje construido con piedras porosas para disminuir la reflexión a menos del 10%.

3 Relación de la Frecuencia de Muestreo y El error

Adicionalmente al error de cuantificación debido a la conversión analógica / digital mediante la cual la señal continua en el tiempo es discretizada, en los sistemas de medición digital se presenta un error debido a la frecuencia de muestreo, es decir producto de la frecuencia con que se toman las muestras de la señal continua, en este caso una señal de oleaje. Este error

puede tomar magnitudes importantes y debe ser considerado al obtener el error máximo que se produce en el canal de medición, considerando éste desde el dispositivo de medición hasta la computadora.

Seguidamente se presenta un análisis en el cual se utiliza como entrada una señal sinusoidal, como pudiera pasar para la generación de oleaje regular o cuando puede considerarse que existe en el espectro del oleaje irregular un armónico fundamental. Se determina el error máximo de las lecturas en función de la frecuencia de muestreo cuando se utiliza un fijador de orden cero, es decir se toma una muestra de la señal y esta mantiene su validez hasta el instante de tiempo en que se toma la próxima muestra (Aström y Wittenmark, 1990; Bellanger, 1989; Dorf y Bishop, 1995; Phillips, 1995).

Se cumple que el error máximo para procesamiento en tiempo real (para el cual sólo se tiene información en el instante de muestreo actual y en instantes anteriores) está dado por la expresión siguiente (Aström y Wittenmark, 1990):

$$E_{\max\text{abs}} = \text{Max} |x(k+1) - x(k)| \quad (1)$$

siendo:

- $E_{\max\text{abs}}$: error máximo absoluto de las lecturas.
- $x(k), x(k+1)$: valores de la señal en el tiempo $t = kT$ y $t = (k+1)T$, respectivamente.
- T : período de muestreo (tiempo entre la toma de las muestras de la señal continua).
- k : valor entero (1,2,3,.....).

Podemos interpretar de la expresión (1) que el valor $X(k)$ será el valor representativo de la señal hasta que sea tomada la muestra siguiente es decir $X(k+1)$, es por ello que el $\text{Max} |x(k+1) - x(k)|$ puede ser considerado como el error máximo absoluto en tiempo real producto de la frecuencia de muestreo de la señal.

El error máximo se localiza de forma simétrica al origen de los ejes de coordenadas, donde se produce la mayor velocidad de cambio de la señal, como se ilustra en la Fig. 5, señalándose como el error máximo absoluto $E_{\max\text{abs}}$.

E_{mpabs} es el error máximo absoluto que se produce alrededor de los valores pico en tiempo real.

De la Fig. 5 se puede plantear:

$$X(k+1) = A \text{sen}(2\pi f T/2) \quad (2)$$

$$X(k) = A \text{sen}[2\pi f(-T/2)] \quad (3)$$

por tanto

$$E_{\max\text{abs}} = |A \text{sen}(2\pi f T/2) - A \text{sen}[2\pi f(-T/2)]|$$

$$E_{\max\text{abs}} = |2A \text{sen}(2\pi f T/2)|$$

$$E_{\max\text{abs}} = 2A |\text{sen}(\pi f T)| \quad (4)$$

siendo:

$$T = 1/F_m$$

F_m : frecuencia de muestreo.

Al tomar $F_m = nf$

donde f es la frecuencia de la señal y n un entero mayor o igual que dos, se obtiene que:

$$E_{\max\text{abs}} = 2A \text{sen}(\pi/n) \quad (5)$$

El error máximo relativo, respecto al valor pico a pico de la señal, expresado en % será:

$$E_{\max\text{rel}} = \frac{2A \text{sen}(\pi/n)}{2A} \times 100 \quad (6)$$

$$E_{\max\text{rel}} = \text{sen}(\pi/n) \times 100 \quad (7)$$

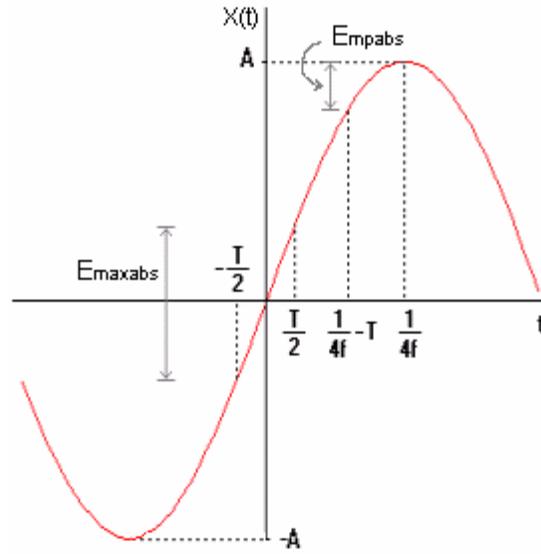


Fig. 5. Error máximo absoluto en tiempo real para una señal sinusoidal (procesamiento causal)

A continuación se realiza un análisis para formular las expresiones del error máximo que se produce alrededor de los valores picos en procesamiento en tiempo real (E_{mpabs}).

Se puede plantear:

$$X(k+1) = A \text{sen}(2\pi f \cdot 1/4f) = A \text{sen}(\pi/2) = A \quad (8)$$

$$X(k) = A \text{sen}[2\pi f(1/4f - T)] \quad (9)$$

$$X(k) = A \text{sen}\left[2\pi f\left(\frac{1-4fT}{4f}\right)\right]$$

$$X(k) = A \text{sen}\left[\frac{\pi}{2}(1-4fT)\right] \quad (10)$$

Se toma $T = \frac{1}{nf}$

y se sustituye en la ecuación (10)

$$X(k) = A \text{sen}\left[\frac{\pi}{2}\left(1-4f \frac{1}{nf}\right)\right] \quad (11)$$

$$X(k) = A \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{n}\right) = A \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \quad (12)$$

y se obtiene que:

$$E_{mpabs} = A - A \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \quad (13)$$

y el error máximo relativo, respecto al valor pico a pico de la señal, expresado en % será:

$$E_{mprel} = \frac{A - A \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{2A} \times 100 \quad (14)$$

$$E_{mprel} = 0.5 \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \right] \times 100 \quad (15)$$

En hidráulica marítima y en otras aplicaciones, en las cuales no se requiera realizar la mayoría de los cálculos en tiempo real, sino a partir de un registro de datos previamente adquiridos, lo más importante es determinar los máximos y mínimos de la señal, la cual puede ser considerada sinusoidal o formada por un armónico fundamental y otros secundarios de pequeñas amplitudes, por tanto en ese caso el error máximo que se puede producir en la determinación de dichos valores, se señala en la Fig. 6, denominándose E_{mepabs} como el error máximo estático absoluto en la determinación de los valores picos, el cual es un error en *procesamiento no causal* pues se dispone de un registro de información previamente adquirida y entonces para un instante de muestreo considerado como el actual (instante k) se tiene información en instantes de muestreo anteriores y posteriores.

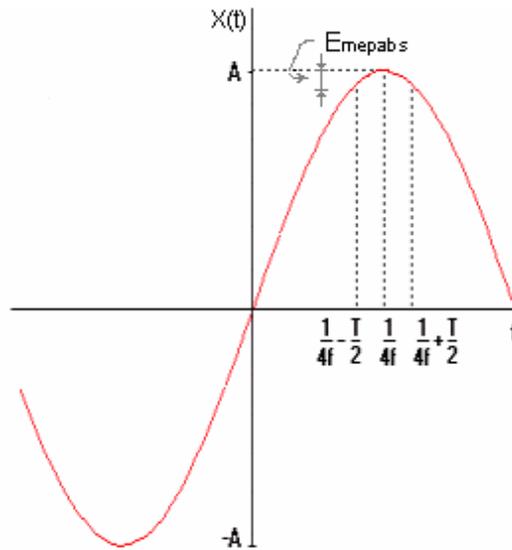


Fig. 6. Error máximo estático absoluto en la determinación de los valores picos (procesamiento no causal)

Este error se produce cuando ninguno de los valores de las muestras tomadas coincide con el valor del pico de la señal. Este error será el máximo cuando las muestras antes y después del pico de la señal quedan distribuidas en la forma que se presenta en la Fig. 6, es decir, ambas muestras están equidistantes del valor pico.

$$E_{mepabs} = |X(k + 0.5) - X(k)| \quad (16)$$

donde:

$$X(k + 0.5) = A \sin(2\pi f \cdot 1/4f) \quad (17)$$

$$X(k + 0.5) = A \sin(\pi/2) = A \quad (18)$$

$$X(k) = A \sin\left[2\pi f \cdot 1/(4f - T/2)\right] \quad (19)$$

$$X(k) = A \sin\left[2\pi f \left(\frac{1 - 2fT}{4f}\right)\right] = A \sin\left[\frac{\pi}{2}(1 - 2fT)\right]$$

$$\text{Sustituyendo } T = \frac{1}{F_m} = \frac{1}{nf}$$

la expresión queda como:

$$X(k) = A \text{sen} \left[\frac{\pi}{2} \left(1 - 2f \frac{1}{nf} \right) \right] \quad (20)$$

$$X(k) = A \text{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} \right) = A \text{cos} \left(\frac{\pi}{n} \right) \quad (21)$$

se obtiene finalmente que:

$$E_{\text{mepabs}} = A - A \text{cos} \left(\frac{\pi}{n} \right) \quad (22)$$

y el error máximo relativo, respecto al valor pico a pico de la señal, expresado en % será:

$$E_{\text{meprel}} = \frac{A - A \text{cos} \left(\frac{\pi}{n} \right)}{2A} \times 100 \quad (23)$$

$$E_{\text{meprel}} = 0.5 \left[1 - \text{cos} \left(\frac{\pi}{n} \right) \right] \times 100 \quad (24)$$

Evaluando las expresiones (7), (15) y (24), para frecuencias de muestreo, que sean n veces la frecuencia de la señal sinusoidal, se obtienen los resultados de la tabla 1.

Tabla 1. Comparación de los errores relativos en función de la frecuencia de muestreo

n	E_{maxrel} (%)	E_{mprel} (%)	E_{meprel} (%)
2	100	100	50
4	70.71	50	14.64
8	38.26	14.64	3.8
10	30.9	9.54	2.44
20	15.64	2.44	0.61
50	6.27	0.39	0.098
100	3.14	0.098	0.024
200	1.57	0.024	0.0061
300	1.04	0.0109	0.0027

La exactitud obtenida es válida cuando se trata de reconstruir completamente la señal continua en el tiempo $X(t)$ a partir de las muestras tomadas, usando un fijador de orden cero. La exactitud en procesamiento en tiempo real, para el E_{maxrel} pudiera interpretarse como el retardo máximo en percibir el valor real que tiene la señal. De manera similar el E_{mprel} sería el retardo máximo pero en valores cercanos a los picos de la señal. Sin embargo E_{meprel} si representa el error máximo relativo que puede producirse, en procesamiento no causal, cuando se desea determinar los valores pico de la señal.

4 Disminuyendo el Error Debido a una Baja Frecuencia de Muestreo

Pueden aplicarse métodos que permitan recobrar la señal continua a partir de sus muestras, lográndose mejorar la exactitud de su reconstrucción sin necesidad de elevar considerablemente su frecuencia de muestreo. Dentro de estos métodos se pueden utilizar los siguientes:

1. Para procesamiento no causal se pueden interpolar puntos en la serie temporal (valores muestreados), que sean compatibles con el vector complejo de dicha serie (interpolación compleja) (Oppenheim y Willsky, 1998; Oppenheim et al., 2000). Por ejemplo cuando se desea realizar el cálculo de los valores pico de las olas en análisis típicos de Hidráulica Marítima.
2. Interpolación de “splines” cúbicos (spline interpolation) (Emery y Thomson, 2001), también para procesamiento no causal.
3. Fijadores de orden uno o superior para procesamiento en tiempo real (Aström y Wittenmark, 1990).

A continuación se presenta un análisis realizado con diferentes frecuencias de muestreo, para posteriormente mostrar el efecto del primer método. La señal de oleaje fue medida en un canal de generación de 80 m de largo, 0.8 m de ancho y donde se pueden manejar profundidades máximas de 0.9 m. Está dotado de un generador con movimiento sinusoidal de la paleta, con accionamiento eléctrico y control a lazo abierto, con el cual se pueden producir oleajes de diferentes amplitudes y frecuencias. Los datos fueron tomados a 48 muestras por segundo (48 Hz) y serán considerados como información de referencia, pues dicha frecuencia de muestreo representa 113 veces la frecuencia pico del espectro de la señal. Confirmando esta consideración, una frecuencia de muestreo de 48 Hz equivale a un período de muestreo de 0.0208 segundos, el cual es 112 veces más pequeño que el período de 2.335 segundos que presenta la ola significativa. El estándar (Goda, 2000), en las mediciones de oleaje es tomar el período de muestreo entre un décimo a una vigésima parte del período de la ola significativa.

Para analizar la distribución de armónicos de la señal de oleaje, en la Fig. 7 se presenta el espectro de amplitud, por tanto, sus unidades serán cm contra Hz, es decir, amplitudes de los armónicos contra frecuencia. Esta distribución de armónicos sería la misma en el espectro de energía (o conocido simplemente por espectro) en cuyo caso las unidades serían cm^2 contra Hz.

El espectro de amplitud tiene las siguientes características:

- Todos los armónicos de interés tienen frecuencias inferiores a 2 Hz.
- La frecuencia pico es de 0.4219 Hz.

Como paso inicial en el análisis estadístico del perfil del oleaje, se obtiene la media aritmética, para luego restarla a cada punto y obtener un registro de media cero. Como se trata de información obtenida en laboratorio, la misma no está afectada por la marea, de lo contrario sería más recomendable realizar una corrección lineal o parabólica (Goda, 2000).

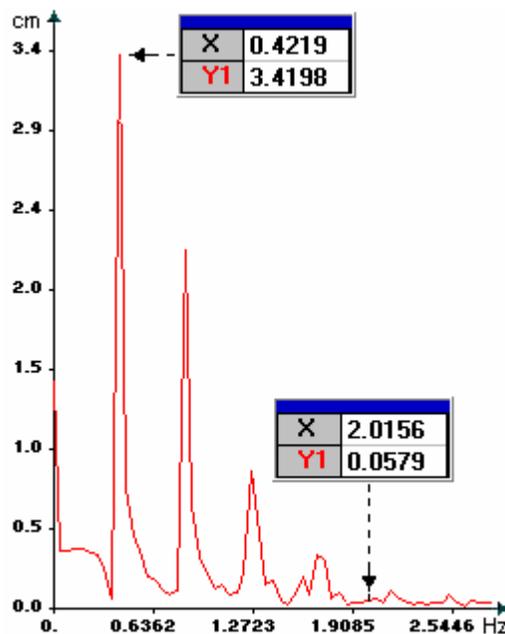


Fig. 7. Espectro de amplitud del oleaje

El método de cálculo utilizado (cruce por cero de forma ascendente) hace que los rizos o armónicos de mayor frecuencia (hasta 2 Hz) y menor amplitud tengan un efecto mínimo en la amplitud y frecuencia de las olas mayores y en la determinación de los valores máximos y mínimos de su perfil, es por ello que es posible tomar la frecuencia pico del espectro como frecuencia de referencia. Por tanto se considera que el muestreo a 48 Hz introduce un error máximo relativo (E_{meprel}) según la expresión (24) de 0.019%, el cual es 13 veces menor que el requerimiento de exactitud utilizado en importantes laboratorios de investigación y que es de 0.25% (Rosengaus, 1988).

En la Tabla 2 se presentan valores estadísticos del oleaje calculados a partir de la señal muestreada a 48, 24, 12, 6 y 3 Hz, respectivamente.

En la Tabla 3 se muestran los errores relativos en porcentaje, con respecto a la señal muestreada a 48 muestras por segundos (48 Hz), para lo cual se utilizó la siguiente expresión:

$$E_{rel} = \frac{|M_{48} - M_x|}{M_{48}} \times 100$$

donde:

M_{48} : magnitud de la señal muestreada a 48 Hz.

M_x : magnitud de la señal muestreada a x Hz.

Se observa que el error relativo de los valores estadísticos del oleaje ha aumentado al disminuir la frecuencia de muestreo y se obtiene una exactitud del 0.5% aproximadamente, para valores de la misma entre 10 y 12 veces la mayor frecuencia de interés en el espectro (2 Hz).

5 Efecto de la Interpolación Compleja

Se realiza el análisis del efecto de la interpolación de puntos en la serie temporal, compatibles con su vector complejo en el dominio de la frecuencia. Con este método se añaden puntos a un registro de oleaje, obteniéndose un efecto cercano a lo que se produciría de haberlo muestreado a mayor frecuencia. Puede ser seleccionado el número de puntos a añadir, llamándole factor de relleno (F_r), definiéndose de la forma siguiente:

$$F_r = \frac{NPSR}{NPSO}$$

donde:

NPSR : número de puntos de la serie rellena.

NPSO : número de puntos de la serie original.

F_r : Debe ser potencia de base 2 para que pueda ser aplicado el algoritmo de la Transformada Rápida de Fourier.

La Fig. 8 muestra parte de la gráfica del nivel del agua contra el tiempo para la señal de oleaje. Se presenta la serie original muestreada a 3 Hz y la serie rellena con factor $F_r = 8$.

Tabla 2. Valores estadísticos del oleaje para diferentes frecuencias de muestreo

<i>Magnitud</i>	48 Hz	24 Hz	12 Hz	6 Hz	3 Hz
\bar{H} (cm)	10.266	10.220	10.106	9.787	9.438
\bar{T} (seg.)	2.366	2.366	2.367	2.367	2.371
$H_{1/3}$ (cm)	10.828	10.778	10.598	10.429	10.196
$T_{1/3}$ (seg.)	2.335	2.348	2.356	2.379	2.333
$H_{1/10}$ (cm)	11.511	11.475	11.121	10.999	10.999
$T_{1/10}$ (seg.)	2.313	2.333	2.333	2.333	2.333
H_{\max} (cm)	11.511	11.475	11.121	10.999	10.999
T_{\max} (cm)	2.313	2.333	2.333	2.333	2.333
#Olas	35	35	35	35	35

Tabla 3. Errores relativos respecto a la señal muestreada a 48 Hz

Magnitud	24 Hz (%)	12 Hz (%)	6 Hz (%)	3 Hz (%)
\bar{H} (cm)	0.4480	1.5585	4.6658	8.0654
\bar{T} (seg.)	0.0422	0.0422	0.0422	0.2113
$H_{1/3}$ (cm)	0.4617	2.1241	3.6848	5.8367
$T_{1/3}$ (seg.)	0.5567	0.8993	1.8843	0.0856
$H_{1/10}$ (cm)	0.3127	3.3880	4.4479	4.4479
$T_{1/10}$ (seg.)	0.8646	0.8646	0.8646	0.8646
H_{\max} (cm)	0.3127	0.3880	4.4479	4.4479
T_{\max} (cm)	0.8646	0.8646	0.8646	0.8646
Suma de errores	3.86	13.12	20.90	24.824
Media	0.4825	1.64	2.6125	3.103
Varianza	0.0786	1.52	3.6214	9.029

Con la aplicación del método, se ha reconstruido la serie original, contrarrestando en gran medida la distorsión provocada por una baja frecuencia de muestreo. Se observa que los picos de la señal han sido conformados añadiendo, entre los valores muestreados, puntos los cuales mantienen la compatibilidad con el vector complejo de la serie original (en este caso se añaden 7 puntos entre cada dos muestras). Se nota la conformación de los valores máximos y mínimos, con independencia o no de que exista en dicha posición un punto de la serie original.

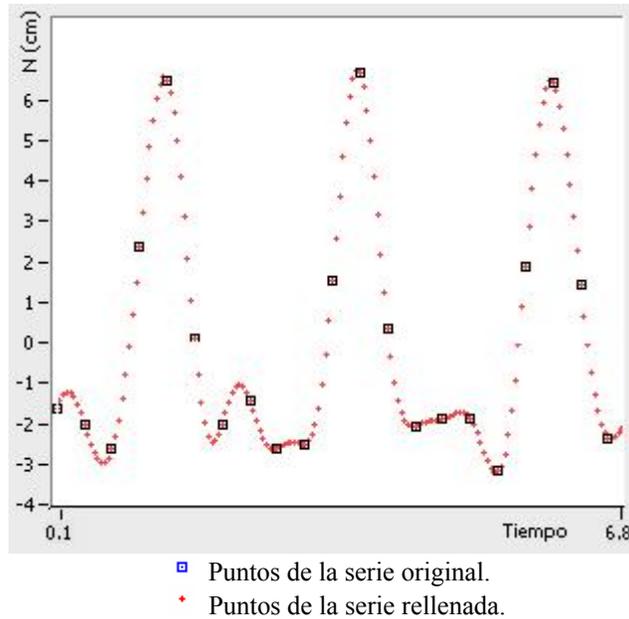


Fig. 8. Ejemplo de interpolación compleja

En la Tabla 4 se presenta un resumen de la media y la varianza de los errores relativos, respecto a la señal muestreada a 48 Hz.

Se les llamó series rellenadas 1, a aquellas, en las que se utilizaron factores de relleno (F_r), de 2, 4, 8 y 16 para las señales muestreadas con 24, 12, 6 y 3 Hz, respectivamente. Para las 4 señales el número total de puntos de las series interpoladas fue de 4096, esto significa que la serie original muestreada a 24 Hz, tenía 2048 puntos y que la interpolación sólo ha añadido un punto intermedio (entre dos muestras) lo que hace suponer la limitación de poder reconfigurar la serie adecuadamente, para esta señal la interpolación no produjo disminución de los errores. Los errores disminuyeron 4.4, 2.3 y 1.4 veces para las señales muestreadas a 12, 6 y 3 Hz, respectivamente.

Tabla 4. Resumen de la media y la varianza de los errores relativos en %

	24 Hz	12 Hz	6 Hz	3 Hz
Series originales	0.48 ± 0.08	1.64 ± 1.52	2.61 ± 3.63	3.1 ± 9.02
Series rellenadas 1	$(F_r = 2)$ 0.48 ± 0.08 <i>No hubo mejoría</i>	$(F_r = 4)$ 0.37 ± 0.13 <i>Mejóro 4.4 veces</i>	$(F_r = 8)$ 1.16 ± 0.52 <i>Mejóro 2.3 veces</i>	$(F_r = 16)$ 2.28 ± 2.49 <i>Mejóro 1.4 veces</i>
Series rellenadas 2	$(F_r = 4)$ 0.04 ± 0.002 <i>Mejóro 11 veces</i>	$(F_r = 8)$ 0.03 ± 0.001 <i>Mejóro 55 veces</i>	$(F_r = 16)$ 0.97 ± 0.76 <i>Mejóro 2.8 veces</i>	$(F_r = 32)$ 1.92 ± 3.09 <i>Mejóro 1.6 veces</i>

Se les denominó series rellenadas 2 a las que utilizaron factores (F_r) de 4, 8, 16 y 32, para las señales muestreadas con 24, 12, 6 y 3 Hz respectivamente. El número total de puntos de las series interpoladas fue de 8192. Para 24 Hz, la interpolación adicionó 3 puntos intermedios. Se añadieron 7, 15 y 31 puntos intermedios a 12, 6 y 3 Hz, respectivamente. En los dos primeros casos (muestreo a 24 y 12 Hz, respectivamente) se aprecian mejoras considerables, con disminución de los errores

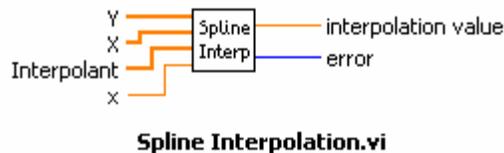
en 11 y 55 veces y resultados más modestos para las dos últimas señales, con frecuencias de muestreo muy bajas de 6 y 3 Hz, respectivamente. Se observa que una vez interpoladas las series muestreadas a 24 Hz y a 12 Hz, en ambos casos la media y la varianza de los errores relativos son similares, quedando demostrado que la interpolación hace innecesario para este ejemplo muestrear la señal continua a 24 Hz, pues resulta suficiente hacerlo a 12 Hz e interpolar con un factor de relleno $Fr = 8$. Se aprecian valores de media y varianza ligeramente menores para 12 Hz, se considera que en tal comportamiento influyen factores aleatorios, que dependen fundamentalmente de la forma en que queden distribuidos los puntos muestreados respecto a la señal continua en el tiempo, la cual al ser irregular hace impredecible tal distribución. En pruebas realizadas que no se muestran en este trabajo, adicionando la misma cantidad de puntos intermedios en ambas series, se mantienen las características de los resultados mostrados.

Resulta evidente que el método de interpolación utilizado siempre disminuye los errores y su efecto es significativamente importante para mejorar la exactitud de las mediciones, cuando éstas han sido realizadas con un muestreo cuya frecuencia ha sido bien elegida, lo cual se detalla en las conclusiones de este trabajo. Resultan satisfactorios factores de relleno de 8 y 16, para canales donde se generan oleaje con características similares al analizado y cuyo espectro se presentó en la fig. 4. En todas las pruebas realizadas se ha mantenido constante el número de olas presentes en el registro del oleaje (35 olas) para que en los errores de los cálculos estadísticos sólo influya la frecuencia de muestreo.

6 Interpolación de “Splines” Cúbicos (Spline Interpolation)

Para obtener esta interpolación se usó la biblioteca de funciones matemáticas que tiene el LabVIEW (National Instruments, 2002), las cuales también están disponibles en el MATLAB.

De acuerdo a la notación que aparece en el LabVIEW, se usa el siguiente esquema:



Donde:

Y: arreglo los valores que serán interpolados.

X: arreglo de los valores correspondiente al eje x, en este caso, será tiempo, el cual se irá incrementando en el período de muestreo con que fueron adquiridos los datos del arreglo Y.

x: (x minúscula) valor del eje x para el cual se desea tener un punto interpolado. Este valor se irá incrementando en el nuevo período de muestreo que resultará de la interpolación, será más pequeño que el período original de muestreo y estará dentro del rango de los valores del arreglo X.

Interpolant: es la segunda derivada de la función de interpolación de “spline” cúbica, la cual es calculada por otro instrumento virtual (VI), denominado *spline interpolant.vi*.

error: retorna un valor que indica si la ejecución de la función fue exitosa o no.

El valor de salida de la interpolación z (interpolation value), en el intervalo $[x_i, x_i + 1]$ está dado por:

$$z = Ay_i + By_i + 1 + Cy_i'' + Dy_i'' + 1$$

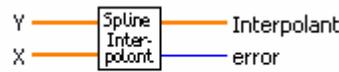
Donde:

$$A = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, \quad B = 1 - A$$

$$C = \frac{1}{6} (A^3 - A) (x_{i+1} - x_i)^2$$

$$D = \frac{1}{6} (B^3 - B) (x_{i+1} - x_i)^2$$

El valor interpolant, puede ser obtenido con otra función (instrumento virtual: Spline Interpolant.vi) que tienen como entradas los registros X, Y.



Spline Interpolant.vi

La función de interpolación $g(x)$ pasa a través de todos los puntos: (x_i, y_i) .

$y_i = g(x_i)$; donde $i = 0, 1, \dots, n-1$.

El instrumento virtual: *spline Interpolant.vi*, obtiene la función de interpolación $g(x)$ interpolando en cada intervalo $[X_i, X_{i+1}]$ con una función polinómica cúbica $P_i(x)$ que reúne las condiciones siguientes:

1. $p_i(x_i) = y_i$
2. $p_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$
3. $g(x)$ tiene continua la primera y segunda derivada en el intervalo $[X_0, X_{n-1}]$ y se cumple que:
 - a) $p'_i(x_i) = p'_{i+1}(x_i)$
 - b) $p''_i(x_i) = p''_{i+1}(x_i)$

Para $i = 0, 1, \dots, n-2$. De ésta última condición, se derivan las ecuaciones siguientes:

$$\frac{x_i - x_{i-1}}{6} g''(x_{i-1}) + \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{3} g''(x_i) + \frac{x_{i+1} - x_i}{6} g''(x_{i+1}) = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

Donde $i = 1, 2, \dots, n-2$ y se obtienen $n-2$ ecuaciones con n $g''(x_i)$ desconocidas, para $i = 0, 1, \dots, n-1$. Este instrumento virtual (*spline Interpolant.vi*) calcula $g''(x_0)$, $g''(x_{n-1})$ usando la fórmula siguiente:

$$g'(x) = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} + \frac{3A^2 - 1}{6} (x_{i+1} - x_i) g''(x_i) + \frac{3B^2 - 1}{6} (x_{i+1} - x_i) g''(x_{i+1})$$

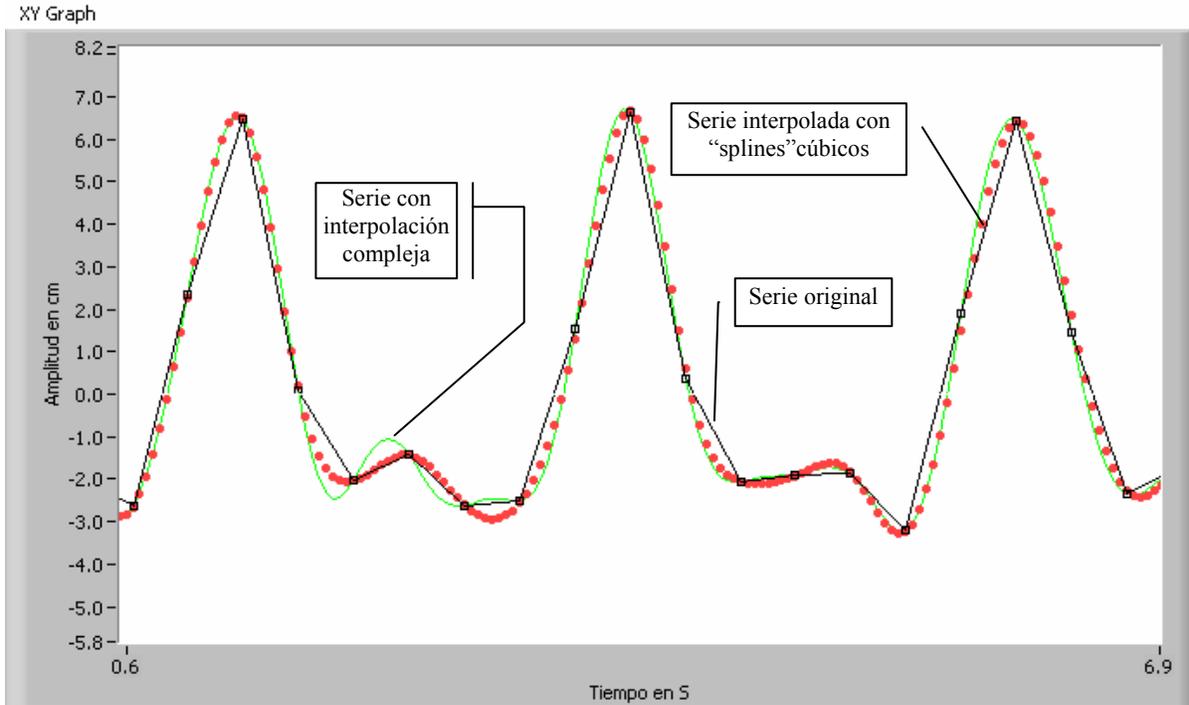
Donde

$$A = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}$$

$$B = 1 - A = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$$

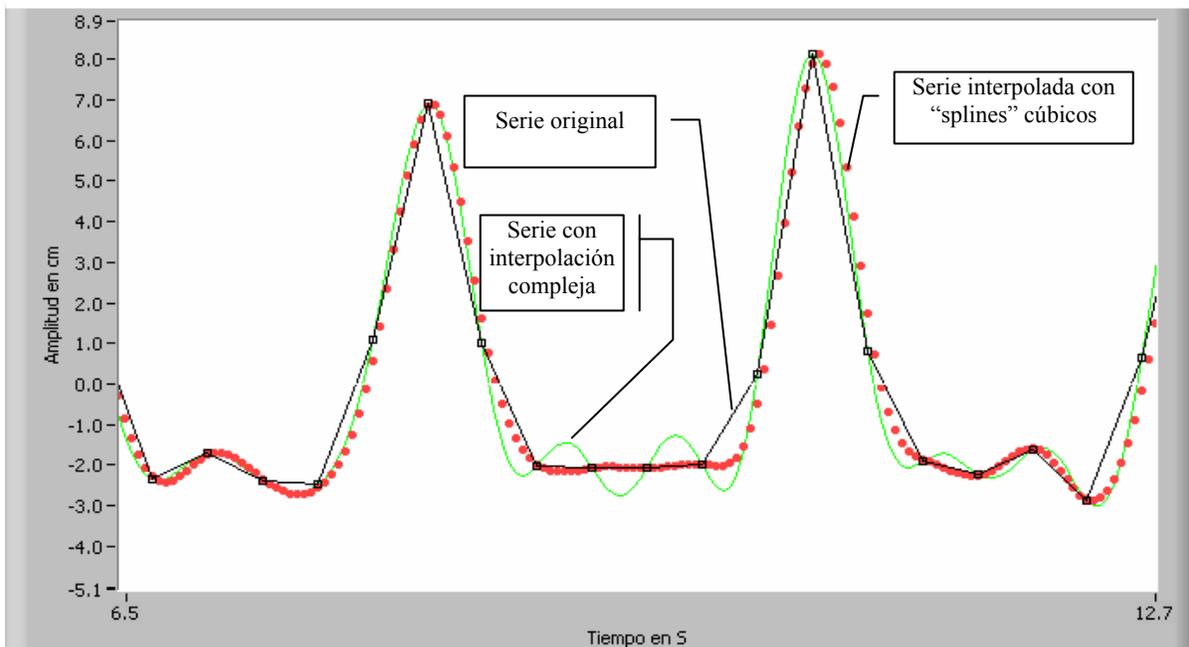
Este VI usa $g''(x_0)$, $g''(x_{n-1})$ para resolver todas las $g''(x_i)$, para $i = 1, \dots, n-2$.

$g''(x_i)$ es la salida **Interpolant**, la cual se utiliza como entrada en el VI *spline interpolation.vi*. En las Fig. 9 y 10 se presentan dos secciones de una serie interpolada con “splines” cúbicos, respectivamente. Aparecen superpuestas la serie original y la serie interpolada mediante la Transformada Rápida de Fourier (interpolación compleja) lo que permite su comparación.



- ▣ Puntos de la serie original. ● Puntos de la serie interpolada con “splines” cúbicos.
- Curva de la serie con interpolación compleja

Fig. 9. Interpolación con “splines” cúbicos (una sección de la serie)



- ▣ Puntos de la serie original. ● Puntos de la serie interpolada con “splines” cúbicos.
- Curva de la serie con interpolación compleja

Fig. 10. Interpolación con “splines” cúbicos (una segunda sección de la serie)

En la Tabla 5 aparecen los coeficientes de correlación de la serie muestreada a 24 Hz y las interpoladas, donde:

Señal 24 Hz: es la señal muestreada a 24 muestras por segundo.

Interpolada con FFT: es la serie interpolada utilizando la transformada rápida de Fourier (FFT), para obtener una frecuencia de muestreo equivalente de 24 Hz.

Interpolada con “splines”: es la serie interpolada con “splines” cúbicos, para obtener una frecuencia de muestreo equivalente de 24 Hz.

Tabla 5. Coeficientes de correlación

	24Hz y 24Hz_FFT	24Hz y 24Hz_Spline	24Hz_FFT y 24Hz_Spline
Coef. de correlación	0.9621	0.6899	0.8011

En ambos casos la serie original que fue interpolada había sido muestreada a 3 Hz, por lo que fueron insertados 8 puntos entre cada dos muestras de la serie original.

Las gráficas y la tabla presentadas muestran que la interpolación compleja (FFT) logra una mejor reconstrucción de la serie original de oleaje.

7 Conclusiones

Las expresiones (7), (15) y (24) permiten calcular el error máximo relativo producido al muestrear una señal continua y sinusoidal, lo cual es válido para una señal de oleaje regular o para el armónico fundamental del oleaje irregular. Este error puede ser considerado un indicador de la exactitud debido a la frecuencia de muestreo, cuando se trata de reconstruir completamente la señal continua en el tiempo $X(t)$ a partir de las muestras tomadas, usando una reconstrucción tipo escalera o fijador de orden cero.

$E_{\max\text{rel}}$ es la exactitud en procesamiento causal (común en aplicaciones de tiempo real) y puede interpretarse como el retardo máximo en percibir el valor real que tiene la señal. De manera similar el E_{mprel} sería el retardo máximo pero en valores cercanos a los picos de la señal.

Sin embargo E_{meprel} representa el error máximo relativo que puede producirse, en procesamiento no causal, cuando se desea determinar los valores pico de la señal.

Para canales de generación de oleaje con características similares al estudiado, la mayor frecuencia de interés en su espectro es inferior a los 2 Hz, pudiéndose tomar una frecuencia de muestreo mínima entre 18-20 Hz (muestras por segundo), lo que equivale a unas 10 muestras por cada ciclo (o longitud de onda) del armónico de mayor frecuencia. frecuencia. Al tomar como referencia el armónico fundamental es recomendable adquirir 20 muestras por ciclo o longitud de onda.

Sin procesamientos adicionales dirigidos a aumentar la exactitud, con los valores de frecuencia de muestreo recomendados anteriormente, se introducen errores relativos en el cálculo de los valores estadísticos del oleaje, menores de un 1%.

Para señales discretizadas con tal frecuencia de muestreo, la interpolación de puntos en la serie temporal, manteniendo la compatibilidad con su vector complejo (interpolación mediante la Transformada Rápida de Fourier), cuando se insertan 8 ó 16 puntos entre cada dos muestras, permite reducir los errores relativos de los valores estadísticos del oleaje a magnitudes menores a 0.25%.

La interpolación mediante “splines” cúbicos, referenciada en la literatura con buena aceptación e implementada en los software comerciales de procesamiento de señales, reconstruye la serie de forma similar a cuando se usa Transformada

Rápida de Fourier, sin embargo con esta última, para señales de oleaje irregular, se logra una reconstrucción más exacta, lo cual puede ser comprobado con los coeficientes de correlación calculados y las gráficas de las Fig. 9 y 10.

En las pruebas realizadas se ha mantenido constante el número de olas presentes en el registro de oleaje, para que en los errores de los cálculos estadísticos sólo influya la frecuencia de muestreo. Es evidente que a un mayor número de olas (aparece recomendado en la literatura usar unas 120), será superior la probabilidad de reducir el error en los cálculos estadísticos, pues éstos se basan en utilizar las olas mayores, las cuales pueden ser detectadas con mayor probabilidad cuando se toma un elevado número de muestras por período.

Referencias

- 1) **Aström K.J.**, and **B. Wittenmark**, *Computer Controlled System, Theory and design*. Englewood Cliffs, Prentice-Hall Inc., New Jersey, USA, 1990, pp. 430.
- 2) **Bellanger M.**, *Digital Processing of Signals. Theory and Practice*, John Wiley & Sons Ltd., 2nd ed. New York, USA, 1989, pp. 530.
- 3) **Beresford P. J.**, *WAVEGEN-Wave Generator Control Software Program, User Manual*, Howbery Park, Wallingford, Oxfordshire, England, 1994. pp. 130.
- 4) **Bowers E.C.**, *Wave grouping and harbour design*. England. Proc. Inst. Civ. Engrs. Pt2, 1988, pp. 120.
- 5) **Dorf R.** and **R.H. Bishop**, *Modern Control Systems*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., New York, USA, 1995, pp. 530.
- 6) **Emery J.** and **R. Thomson**, *Data analysis methods in physical oceanography*. Elsevier. Amsterdam, Netherlands, 2001, pp. 638.
- 7) **Goda Y.**, *Random Seas And Design of Maritime Structures. Advanced Series on Ocean Engineering*, Volume 15. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. Singapore. 2000, pp. 443.
- 8) **National Instruments**, *LabVIEW, a graphical programming language to create applications, version 6.1*, 2002. www.ni.com/labview.
- 9) **Oppenheim A.V.**, and **A. Willsky**, *Señales y Sistemas*, 2^a. edición, Prentice-Hall, Inc., Hispanoamericana, D.F., México, 1998, pp. 956.
- 10) **Oppenheim A.V.**, **R.W. Schafer** and **J.R Buck**, *Tratamiento de señales en tiempo discreto*, 2^a. edición Prentice-Hall, Inc., Madrid, España, 2000, pp. 873.
- 11) **Ogata K.**, *Ingeniería de Control Moderna*. Prentice Hall, México, 1998, pp. 930.
- 12) **Phillips, Ch.L.**, *Digital Control System Analisis and Design*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1995, pp. 720.
- 13) **Proakis J.G.** y **D.G. Manolakis**, *Tratamiento digital de señales, Principios, algoritmos y aplicaciones*, 3^a. edición, Prentice-Hall, Inc., Madrid, España, 1999, pp. 976.
- 14) **Rosengaus M.M.**, *Estudio experimental de la generación de oleaje constante y su atenuación*, Tesis de Doctorado. Massachusetts, USA, Instituto Tecnológico de Massachusetts, 1988.
- 15) **Stansell, P. J. Wolfram** and **B. Linfoot**, "Effect of sampling rate on wave height statistics", *Ocean Engineering*. vol. 29, núm. 9, Oxford, 2002, UK, pp. 1023-1047.

Glosario

#_{Olas}: número de olas componentes del registro de oleaje.

H_{1/10}: altura media de un décimo de las olas más grandes.

H_{1/3}: altura media de un tercio de las olas más grandes (ola significativa).

H_{max}: altura máxima

\bar{H} : altura media de las olas componentes.

T_{1/10}: período medio del décimo de las olas más grandes.

T_{1/3}: período medio del tercio de las olas más grandes (período significativo).

T_{max}: período máximo.

\bar{T} : período medio.

Ancho de banda de lazo cerrado: Se obtiene de hallar la respuesta de frecuencia de un lazo cerrado de control. Constituye la banda de frecuencias en la cual el lazo de control puede responder adecuadamente a las señales de entrada. Normalmente esta banda de frecuencia inicia en 0 hasta la denominada frecuencia de corte.

Fijador de orden 0: mantiene a su salida el valor de la señal del instante de muestreo anterior hasta el instante actual.



Luis Pastor Sánchez Fernández. Doctor en Ciencias Técnicas, otorgado por la Comisión Nacional de Grados Científicos de la República de Cuba, a propuesta del Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría (ISPJAE) en 1998. Máster en Automática. Ingeniero Electricista desde 1980. Profesor del Departamento de Automática del ISPJAE, desde 1980 al 2000. Actualmente es Profesor Titular del Centro de Investigación en Computación del Instituto Politécnico Nacional, de Ciudad de México y desarrolla sus investigaciones en el Laboratorio de Modelación y Tiempo Real, en áreas vinculadas a Sistemas Distribuidos de Control y de Supervisión Predictiva en Procesos Tecnológicos Diversos.



Juan Luis Díaz de León Santiago. Grados de Maestro en Ciencias (1993) en Control Automático y de Doctor en ciencias (1996) en Morfología Matemática, obtenidos en el CINVESTAV-IPN. Investigador invitado (1996) y profesor visitante (1997) de la Universidad de Florida. Director de Tecnología (2000-2001) del Sistema Nacional de Seguridad Pública. Actualmente, es Director e investigador titular C del CIC-IPN y Director Fundador del Grupo de Robótica y Análisis de Imágenes (GRAI). Miembro del Sistema Nacional de Investigadores y Premio Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico de Excelencia Luis Enrique Erro. Nombramiento de asociado honorario de la Asociación Boliviana para el Avance de la Ciencia (ABAC), perteneciente a la Academia Nacional de Ciencias de Bolivia. Otorgamiento oficial de testimonio de bienvenida y entrega de las llaves de la Ciudad de la Provincia de Cercado Cochabamba, Bolivia por su trayectoria profesional. Distinguido por el Departamento de Cochabamba, Bolivia, con el Reconocimiento "Honor al Mérito" por sus aportes a la investigación, en mayo de 2003. Presidente fundador de la Fundación Internacional "Ciencia y Tecnología de las Américas", CyT-Américas, en agosto de 2003. Areas de Interés: Morfología Matemática, Análisis de Imágenes, Redes Neuronales Morfológicas, Teoría de Control y Robótica Móvil.



Cornelio Yáñez Márquez. *Licenciado en Física y Matemáticas (1989) por la ESFM-IPN. Grados de Maestro en Ciencias (1995) en Ingeniería de Cómputo y de Doctor en ciencias de la Computación (2002), obtenidos en el CIC-IPN. Actualmente, es profesor investigador titular C del CIC-IPN y miembro fundador del Grupo de Robótica y Análisis de Imágenes. Mención honorífica en el examen de grado de Doctorado y Presea Lázaro Cárdenas 2002, recibida de manos del C. Presidente de la República. Miembro del Sistema Nacional de Investigadores. Nombramiento de asociado honorario de la Asociación Boliviana para el Avance de la Ciencia (ABAC), perteneciente a la Academia Nacional de Ciencias de Bolivia. Otorgamiento oficial de testimonio de bienvenida y entrega de las llaves de la Ciudad de la Provincia de Cercado Cochabamba, Bolivia por su trayectoria profesional, en mayo de 2003. Vicepresidente fundador de la Fundación Internacional "Ciencia y Tecnología de las Américas", CyT-Américas, en agosto de 2003. Areas de Interés: Memorias Asociativas, Redes Neuronales, Morfología Matemática, Análisis de Imágenes y Robótica Móvil.*



Roberto Herrera Charles. *Es Ingeniero Electrónico egresado de Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco, México, (1988). Maestría en Sistema Digitales en CITEDIPN (1997), realiza su Doctorado en Ciencias Computacionales en el Centro de Investigación en Computación CIC-IPN. Actualmente se desempeña como profesor investigador en el CITEDIPN. Sus áreas de interés son los Sistemas y Aplicaciones de Tiempo-Real, computación Paralela y Distribuida, Algoritmos de Control y Generaciones de oleajes aleatorios. charles@cic.ipn.mx*